CURVE E SUPERFICI

Sia J un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $\hat{\alpha}: J \to \mathbb{R}^N$ una funzione. Se $\hat{\alpha}(t) = (\hat{\alpha}_1(t), \ldots, \hat{\alpha}_N(t))$, allora definiremo

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} := \left(\frac{d\hat{\alpha}_1}{dt}, \ldots, \frac{d\hat{\alpha}_N}{dt}\right), \quad \frac{d^2\hat{\alpha}}{dt^2} := \left(\frac{d^2\hat{\alpha}_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\hat{\alpha}_N}{dt^2}\right)$$

e così via. Diremo che $\hat{\alpha}$ è una funzione liscia o di classe C^∞ se $\frac{d^k\hat{\alpha}}{dt^k}$ esiste per ogni $k \geq 1$ e per ogni $t \in J$.

Sia ora I un intervallo di $\mathbb{R}$ non necessariamente aperto. Una funzione

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^N$$

è detta liscia se esiste un intervallo aperto J contenente I e una funzione

$$\hat{\alpha} : J \to \mathbb{R}^N$$

tale che 1) $\hat{\alpha}$ è liscia, 2) $\hat{\alpha}_{|I} = \alpha$.

Spesso denoteremo $\frac{d\alpha}{dt}$ con $\alpha'(t)$ o $\dot{\alpha}(t)$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ con $\alpha''(t)$ o $\ddot{\alpha}(t)$ e così via.

<u>Definizione</u> Una curva parametrizzata di classe C^∞ (o liscia) in $\mathbb{R}^N$ è una funzione $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e α è di classe C^∞ (o liscia).

L'immagine $\alpha(I)$ è detta traccia (o sostegno) della curva. La variabile $t \in I$ è detto parametro della curva. Se $\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}^N$ con

$$\alpha(a) = \alpha(b), \; \alpha'(a) = \alpha'(b), \; \dots, \; \alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b),$$

per ogni $k \geq 1$, allora la curva è detta chiusa.

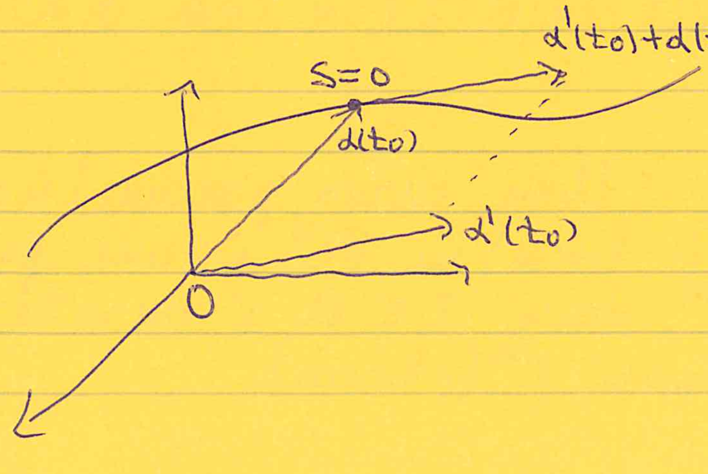
Il vettore $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_N'(t)) \in \mathbb{R}^N$ è detto vettore tangente alla curva α nel punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$ (oppure vettore velocità di α all'istante t).

Se $\alpha'(t_0) \neq 0$, la retta $T_{\alpha(t_0)}$ con equazioni parametriche

$$X = s \cdot \alpha'(t_0) + \alpha(t_0), \quad s \in \mathbb{R}$$

cioè
$$x_1 = s\alpha_1'(t_0) + \alpha_1(t_0)$$
$$\vdots$$
$$x_N = s\alpha_N'(t_0) + \alpha_N(t_0)$$

è detta la retta tangente affine alla curva nel punto $\alpha(t_0)$.



<u>Esempi</u> Le funzioni lisce

$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

$\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (\cos 5t, \sin 5t)$

hanno la stessa traccia: il cerchio

$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

...

La funzione $\hat{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\hat{\alpha}(t) = (t, t^2)$

ha come traccia la parabola $y = x^2$.

La funzione $\hat{\beta}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\hat{\beta}(t) = (t^3, t^6)$

ha come traccia la stessa parabola $y = x^2$.

...

Se definiamo $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = 5t$,

e $\hat{h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{h}(t) = t^3$, allora

abbiamo $(\alpha \circ h)(t) = \alpha(5t) = (\cos 5t, \sin 5t)$

$= \beta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e

$(\hat{\alpha} \circ \hat{h})(t) = \hat{\alpha}(t^3) = (t^3, t^6) = \hat{\beta}(t)$.

ovvero $\alpha \circ h = \beta$, $\hat{\alpha} \circ \hat{h} = \hat{\beta}$.

Mentre $h(t) = s = 5t$ è una funzione

liscia con inversa $t = \frac{s}{5}$ pure liscia,

$\hat{h}(t) = t^3 = s$ è liscia e invertibile, ma l'inversa $t = \sqrt[3]{s}$ non è neppure di classe C^1 (nell'origine non è derivabile!).

In altre parole, h è un lecito cambio di parametro, mentre $\hat{h}$ non lo è. Intanto ricordiamo che un diffeomorfismo liscio (o di classe C^∞) è un omeomorfismo h tra due aperti di $\mathbb{R}$ tale che h e la sua inversa h^{-1} siano lisce (o classe C^∞). Pertanto $h(t) = 5t$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}$, mentre $\hat{h}(t) = t^3$ non è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}$.

<u>Definizione</u> Due intervalli I e $\hat{I}$ sono diffeomorfi se esiste un intervallo aperto J contenente I, un intervallo aperto $\hat{J}$ contenente $\hat{I}$ e un diffeomorfismo

$$h : J \to \hat{J}$$

tale che $h(I) = \hat{I}$.

<u>Esempio</u> $h(t) = t^3$ è un diffeomorfismo da $(0, +\infty)$ su $(0, +\infty)$ con inversa $h^{-1}(s) = \sqrt[3]{s}$ su $(0, +\infty)$

Quindi h induce un diffeomorfismo da $I=[3,4]$ su $\hat{I}=[27,64]$.

<u>Definizione</u>. Due curve parametrizzate lisce $\alpha: I \to \mathbb{R}^N$ e $\beta: \hat{I} \to \mathbb{R}^N$ sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo $h: I \to \hat{I}$ di classe C^∞ (o liscio) tale che $\beta \circ h = \alpha$. h è detto anche un cambio (o cambiamento) di parametro.

In tal modo abbiamo definito una relazione d'equivalenza

Da $(\beta \circ h)(t) = \alpha(t)$, otteniamo

$h'(t) \cdot \beta'(h(t)) = \alpha'(t)$. Ora

$h: I \to \hat{I}$ è un diffeomorfismo liscio, pertanto esiste $K: \hat{I} \to I$ liscia tale che

$K \circ h = Id_I$, $\quad h \circ K = Id_{\hat{I}}$

quindi $K'(h(t)) \cdot h'(t) = 1$, cioè $h'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Siccome h è continua, I è un intervallo, allora abbiamo $h'(t) > 0 \quad \forall\, t \in I$

oppure $h'(t) < 0 \quad \forall\, t \in I$.

Nel caso $h'(t)>0$, i vettori velocità $\beta'(h(t))$ e $\alpha'(t)$ hanno lo stesso verso, mentre nel caso $h'(t)<0$ hanno verso opposto.

<u>Definizione</u> Una curva liscia di $\mathbb{R}^N$ è una classe d'equivalenza di curve parametrizzate lisce in $\mathbb{R}^N$.

Dire che $\alpha: I \to \mathbb{R}^N$ è una curva è la scelta di una parametrizzazione della curva che stiamo considerando.

Per esempio le due curve

$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$

e $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t, a2\pi t)$

con $r>0$, $a\neq 0$, sono due parametrizzazioni equivalenti ($h(t) = 2\pi t$ è il cambio di parametro) dell'elica circolare di raggio r e passo a. Il sostegno dell'elica circolare è contenuto nel cilindro di equazione

$$x^2 + y^2 = r^2$$

I punti $\alpha(t)$ e $\alpha(t+2\pi)$ stanno sulla stessa direttrice del cilindro e distano tra loro:

$$d(\alpha(t), \alpha(t+2\pi)) = \sqrt{(r\cos t - r\cos(t+2\pi))^2 + (r\sin t - r\sin(t+2\pi))^2 + (at - at - 2\pi a)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 0 + (-2\pi a)^2} = 2\pi |a|.$$

Nel caso di β, invece sono i punti $\beta(t)$ e $\beta(t+1)$ che stanno sulla stessa direttrice con distanza $2\pi|a|$.

<u>Definizione</u> Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ è detta regolare se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

α è detta a velocità unitaria se

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \dots + \alpha_N'(t)^2} = 1$$

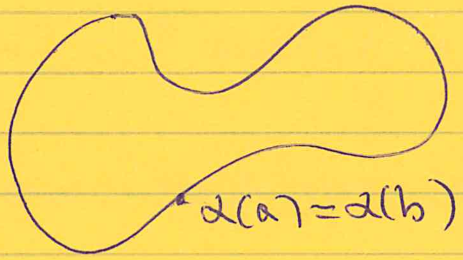
per ogni $t \in I$.

<u>Definizione</u> Un arco di Jordan liscio in $\mathbb{R}^N$ è una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ tale che α induca un omeomorfismo tra I e $\operatorname{Im}\alpha$.

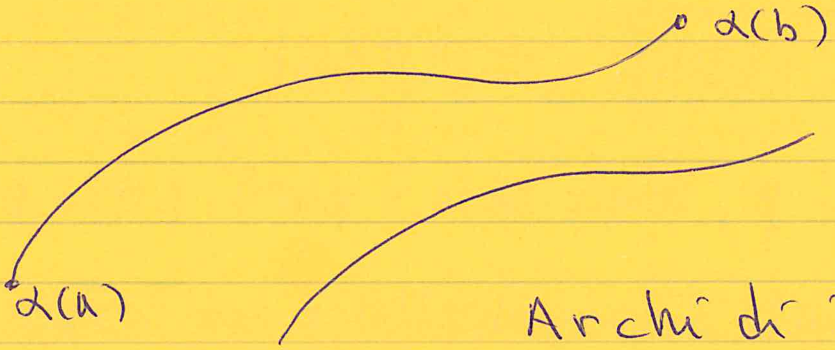
Una curva di Jordan è una curva liscia

in $\mathbb{R}^N$, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, tale che α è iniettiva su $[a,b)$ e $(a,b]$ e inoltre

$$\alpha(a) = \alpha(b)$$



Curva di Jordan



Archi di Jordan.

Considerando il diagramma seguente associato a una curva (chiusa) di Jordan

$$\begin{tikzcd} I = [a,b] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^N \\ S^1 \subset \mathbb{R}^2 \arrow[ur, "\hat{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

dove $\pi(t) = \left(\cos\left(\frac{t-a}{b-a}\right), \sin\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right)$

ed $\hat{\alpha}$ è così definita:

$\hat{\alpha}(1,0) = \alpha(a) = \alpha(b)$ e negli altri punti $\hat{\alpha}\left(\cos\left(\frac{t-a}{b-a}\right), \sin\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right) := \alpha(t)$, vediamo che $\hat{\alpha}$ è un omeomorfismo su $\mathrm{Im}\,\alpha =: C$. Infatti ciò segue dal fatto che $\pi : (a,b) \to S^1 \setminus \{(0,1)\}$ è un omeomorfismo.

<u>Esempio</u> Una parametrizzazione dell'ellisse $C \subset \mathbb{R}^2$ di semiassi $a, b > 0$, dato come luogo di zeri di $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

è fornita da $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Se restringiamo α all'intervallo $[0, 2\pi]$, vediamo che

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

si dice che C è una curva di Jordan.

<u>Esempio</u> Ricordiamo le funzioni seno e coseno iperbolici:

$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

Allora $-(\sinh t)^2 + (\cosh t)^2 = 1$ ci suggerisce una parametrizzazione dell'iperbole $C := \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$:

$$\alpha(t) = (a \cosh t, \; b \sinh t)$$

Nota che intendiamo $\cosh t = \cosh(t)$
$\sinh t = \sinh(t)$.

Ora andiamo a vedere che ogni curva regolare può essere parametrizzata in modo canonico, in certo senso il parametro dipende dalla "forma geometrica della curva".

<u>Definizione</u> Sia $I = [a,b]$ un intervallo e sia $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva parametrizzata liscia. Diremo che

$$L(\alpha) := \int_a^b \| \alpha'(t) \| \, dt$$

è la lunghezza di α.

<u>Teorema</u> La lunghezza è una proprietà geometrica, cioè non dipende dalla parametrizzazione scelta. Cioè se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ sono equivalenti, allora $L(\alpha) = L(\beta)$.

<u>Dim</u> Dato che α e β sono equivalenti, esiste un diffeomorfismo $h : [c,d] \to [a,b]$ tale che $\alpha \circ h = \beta$. Quindi

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)), \text{ per ogni } t \in [c,d]$$

da cui $\beta'(t) = h'(t)\,\alpha'(h(t))$. Pertanto

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\|\,dt = \int_c^d \|h'(t)\|\,\|\alpha'(h(t))\|\,dt$$

$$\overset{A1}{=} \int_a^b \|\alpha'(s)\|\,ds = L(\alpha).$$

Nota che se $h'(t) > 0$, allora

$$h(c) = a, \quad h(d) = b$$

mentre se $h'(t) < 0$, abbiamo

$$h(c) = b, \quad h(d) = a,$$

per cui il passaggio A1 è giustificato. [A1 = Analisi 1!].

Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^N$

due parametrizzazioni di una stessa curva.

Allora da $\beta(t) = \alpha(h(t))$, si deduce che $\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$, per cui α è regolare se e solo se β è regolare.

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ una curva liscia, $t_0 \in I$.

Definiamo la funzione $S : I \to \mathbb{R}$ con

$$S(t) := \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

Quindi $S(t_0) = 0$, $S(t) < 0$ se $t < t_0$, $S(t) > 0$ se $t > t_0$. Se cambiamo t_0 con $\hat{t}_0$, otteniamo

$$\hat{S}(t) := \int_{\hat{t}_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{\hat{t}_0}^{t_0} \|\alpha'(t)\| \, dt + \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$$= S(t) + c, \quad \text{con } c = \int_{\hat{t}_0}^{t_0} \|\alpha'(t)\| \, dt \in \mathbb{R}$$

Inoltre, dal Teorema di Newton-Leibniz,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0$$

Ora la funzione $\sqrt{x}$ è liscia sullo intervallo aperto $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$

Con $\dfrac{d^n \sqrt{x}}{d x^n} = (-1)^{n-1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$

dove per $n=1$, $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot\cdot (2n-3) = -1$ $\square$

Siccome $\alpha_1(t), \quad , \alpha_N(t)$ sono lisci, anche $\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_N'(t)^2$ è liscia. Poiché α è regolare abbiamo $\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_N'(t)^2 > 0$. Dunque la funzione

$$\frac{dS}{dt}(t) = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \quad + \alpha_N'(t)^2}$$

è liscia e quindi anche $s(t)$ è liscia. Inoltre

$s(t)' = \dfrac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0$ implica che s è una funzione invertibile con inversa liscia. chiamiamo h la funzione inversa di $S: I \to S(I) = J \subset \mathbb{R}$.

Allora $\quad h \circ S = Id_I, \quad S \circ h = Id_{S(I)}$

da cui $h'(S(t)) \cdot S'(t) = 1$, cioè

$$h'(S(t)) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$$

Ponendo $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$, $s \in S(I) = J$, allora β ed α sono equivalenti in quanto h è un diffeomorfismo (= cambio di parametro).

Inoltre $\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.
$(t = h(s))$. In conclusione abbiamo dimostrato la

<u>Proposizione</u> Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ una curva regolare. Allora esiste una curva $\beta : J \to \mathbb{R}^N$ equivalente ad α con

$$\|\beta'(s)\| = 1, \text{ per ogni } s \in J.$$

<u>Oss.</u> Sia $\beta : J \to \mathbb{R}^N$ a velocità unitaria come sopra. Sia $s_0 \in J$ fissato; allora

$$L(\beta) := \int_{s_0}^{s} \|\beta'(u)\|\, du = s - s_0$$

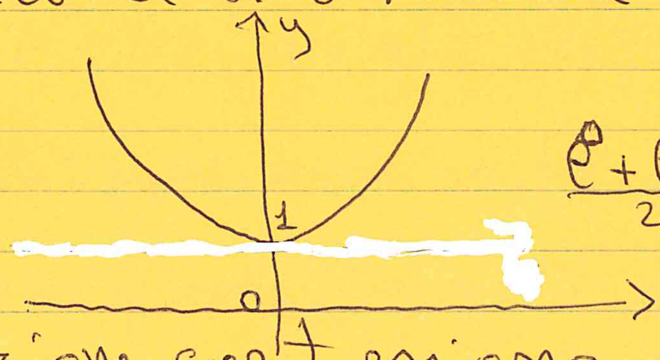
Cioè la lunghezza di β coincide con il parametro s a meno di una traslazione.
s è detto parametro d'arco o lunghezza d'arco.
<u>Esempio</u>. Si consideri la curva

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ così definita}$$

$$\alpha(t) = (t, \cosh t).$$

α è una parametrizzazione della catenaria

Il grafico di α o traccia è quello in figura



$$\frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1 = \cosh(0)$$

Un'equazione cartesiana è
$$y = \cosh x$$

Nota che $\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(-x)$ per cui cosh è pari. Inoltre

$$\cosh'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh(x) \quad e$$

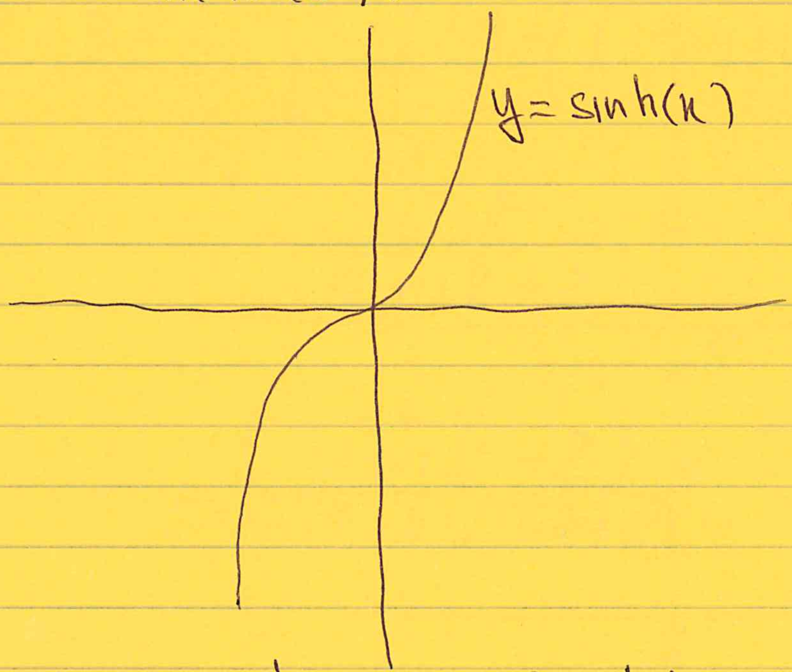
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Il vettore tangente di $\alpha(t) = (\cosh(t), t)$ è

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), 1), \text{ per cui}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2(u)}\, du = \int_0^t \cosh(u)\, du$$

$$= \sinh(t).$$



L'inverso $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del seno iperbolico è così determinato:

$$s = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \frac{e^{t} - 1/e^{t}}{2} \Rightarrow$$

$$e^{2t} - 2se^{t} - 1 = 0 \Rightarrow e^{t} = s + \sqrt{1+s^2}$$

(16)

da cui $t = \log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)$

cioè $t = \operatorname{arcsinh}(s)$

La parametrizzazione della catenaria rispetto al parametro d'arco è:

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(\operatorname{arcsinh}(s))$$

$$= \left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right), \cosh\left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right)\right)$$

$$= \left(\log(s+\sqrt{1+s^2}),\right.$$

in quanto

$$\cosh\left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right) = \frac{e^{\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)} + e^{-\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{s+\sqrt{1+s^2} + \frac{1}{s+\sqrt{1+s^2}}}{2}$$

$$= \frac{s+\sqrt{1+s^2} + \frac{\left(s-\sqrt{1+s^2}\right)}{\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\left(s-\sqrt{1+s^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{s+\sqrt{1+s^2} - \left(s-\sqrt{1+s^2}\right)}{2} = \sqrt{1+s^2}$$

<u>Esempio</u> Si consideri la spirale logaritmica:

$\alpha(t) = (e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t)$, dove k è una costante non nulla.

Il vettore tangente è

$$\alpha'(t) = \left(e^{kt}(k\cos t - \sin t), e^{kt}(k\sin t + \cos t)\right)$$

La velocità scalare è:

$$\|\alpha'\| = \sqrt{e^{2kt}\left[k^2\cos^2 t + \sin^2 t - 2k\cos t\sin t + k^2\sin^2 t + \cos^2 t + 2k\cos t\sin t\right]}$$

$$= \sqrt{e^{2kt}\left[k^2+1\right]} = e^{kt}\sqrt{k^2+1} > 0$$

Quindi α è regolare. Il parametro d'arco è

$$s(t) = \int_0^t e^{ku}\sqrt{k^2+1}\, du = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\left[e^{kt}-1\right]$$

Quindi $\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 = e^{kt}$, da cui

$$t = \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$

La curva

$$\beta(s) = \left(\left(1+\frac{ks}{\sqrt{1+k^2}}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{ks}{\sqrt{1+k^2}}\right)\right), \left(1+\frac{ks}{\sqrt{1+k^2}}\right)\sin\left(\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{ks}{\sqrt{1+k^2}}\right)\right)\right)$$

è equivalente ad α ed è unitaria.

<u>Esempio</u> $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ ha come immagine la cubica gobba. Infatti: $\operatorname{Im}\alpha =: C$ non è una curva piana. Se lo fosse esisterebbero $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ e $C \subset \{ax+by+cz+d=0\}$.
Ciò vorrebbe dire che

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ma questo implica che $a = b = c = d = 0$: assurdo.
Il vettore tangente è $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ per cui

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\, du$$

È noto che un tale integrale non si può calcolare tramite le funzioni familiari come logaritmo, esponenziale, seno, coseno, etc.
<u>È un integrale ellittico</u>. Quindi non riusciamo ad avere una formula inversa del tipo $t = t(s)$ con una funzione $t(s)$ buona.

Curve Piane

Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata dal parametro d'arco, quindi $\|\alpha'(s)\| = 1$ per ogni $s \in I$.

$\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$ implica $\dot{\alpha}(s) \cdot \ddot{\alpha}(s) = 0$.

Scegliamo un vettore N unitario ed ortogonale a T ottenuto da una rotazione diretta di $\frac{\pi}{2}$ gradi da T. Cioè se $T = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s))$, allora $N = (-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s))$.

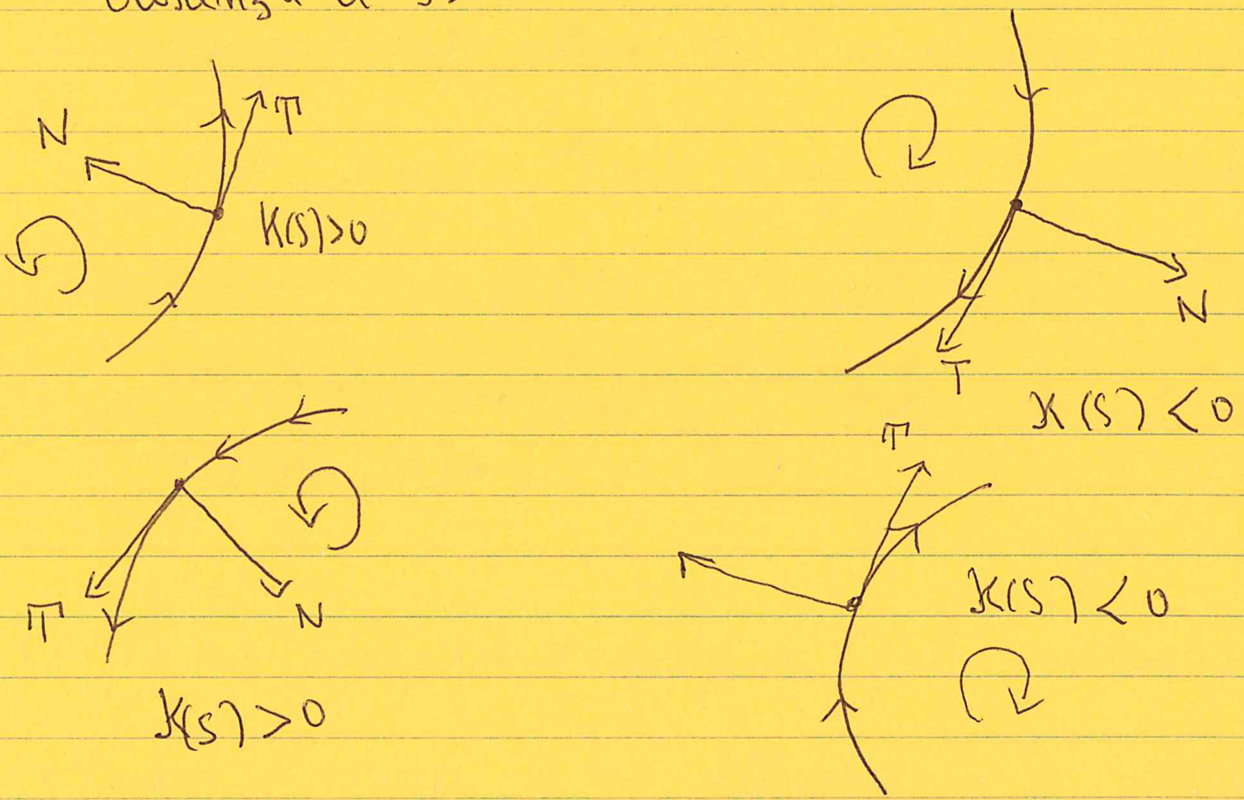
Nota che $\det \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha_1'(s), & \alpha_2'(s) \\ -\alpha_2'(s), & \alpha_1'(s) \end{bmatrix} = 1$ per ogni $s \in I$.

Siccome $\ddot{\alpha}(s)$ è perpendicolare ad $\dot{\alpha}(s) = T$, allora $\alpha''(s)$ è parallelo ad N, quindi esiste $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha''(s) = \kappa(s) N(s)$, da cui $\kappa(s) = \alpha''(s) \cdot N(s)$, quindi $\kappa(s)$ è una funzione liscia. Precisamente

$$\kappa(s) = (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s)) \cdot (-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s))$$
$$= -\alpha_1''(s)\, \alpha_2'(s) + \alpha_1'(s)\, \alpha_2''(s).$$

<u>Definizione</u> $\kappa(s)$ è detta la curvatura di α all'istante s oppure nel punto $\alpha(s)$.
Prendendo la norma di $\alpha''(s) = \kappa(s) N(s)$ otteniamo $|\alpha''(s)| = |\kappa(s)|$.

I seguenti diagrammi illustrano come il segno di $\kappa(s)$ è determinato, la freccia va nel verso di crescenza di s.



$N \cdot N = 1$ implica $N' \cdot N = 0$, quindi $N'(s) \perp N(s)$, per cui $N'(s)$ è parallelo a $T(s)$, quindi esiste $l(s) \in \mathbb{R}$ tale che

$$N'(s) = l(s)\, T(s), \text{ da cui}$$

$l(s) = N'(s) \cdot T(s)$.

Differenziamo $N \cdot T = 0$, otteniamo

$N'(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot T'(s) = 0$, cioè

$$l(s) = N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) = -N(s) \cdot \alpha''(s) = -K(s)$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$T'(s) = \alpha''(s) = K(s)\, N(s)$$

$$N'(s) = -K(s)\, T(s)$$

Queste equazioni sono dette le equazioni di Frenet nel piano per la curva α. Possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$$

<u>Definizione</u> Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ una curva regolare. Se $\alpha''(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, allora diremo che α è biregolare.

Supponiamo che $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ sia una curva regolare parametrizzata col parametro d'arco. Se α è anche biregolare, cioè $\alpha''(s) \neq 0$ $\forall s \in I$, allora $|K(s)| = |\alpha''(s)| > 0$ $\forall s \in I$. Allora il cerchio di raggio $r(s) := \dfrac{1}{|K(s)|}$ e centro $\alpha(s) + \dfrac{1}{K(s)} N(s)$ è detto cerchio osculatore ad α in s.

Si può dimostrare che se anche il cerchio osculatore è parametrizzato con parametro d'arco, allora in un punto s_0 tale che $\alpha(s_0) = C(s_0)$, dove C è la parametrizzazione del cerchio, allora

$$\alpha'(s_0) = C'(s_0)$$

$$\alpha''(s_0) = C''(s_0)$$

cioè α e C si toccano al secondo ordine nel punto $\alpha(t_0) = C(t_0) = p_0 \in \mathbb{R}^2$.

<u>Teorema</u> Una curva regolare parametrizzata col parametro d'arco è una retta se e solo se la curvatura è identicamente nulla.

Dim. Se $\alpha(s) = a + s v$ con $\|v\| = 1$, allora $T(s) = \alpha'(s) = v$, $T'(s) = \alpha''(s) = 0$ implica che $K(s) \equiv 0$.

Viceversa, supponiamo $K(s) \equiv 0$. Allora integriamo $\alpha''(s) = K(s) \cdot N(s) \equiv 0$ e abbiamo $\alpha'(s) = T(s) = v$, da cui $\alpha(s) = s v + a$

C.V.D.

La curvatura $\kappa(s) = \dot{T}(s) \cdot N(s)$ può esprimersi come

$$\det\begin{bmatrix} T(s) \\ \dot{T}(s) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \alpha_1'(s) & \alpha_2'(s) \\ \alpha_1''(s) & \alpha_2''(s) \end{bmatrix} = \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)$$

in quanto $T(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s))$, $N(s) = (-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s))$ e quindi

$$\dot{T}(s) \cdot N(s) = (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s))(-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s)) = \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)$$

<u>Esercizio</u>. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare e sia $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ la curva equivalente ad α parametrizzata rispetto al parametro d'arco:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^2 \\ J \arrow[u, "h = s^{-1}"] \arrow[ur, "\alpha \circ h = \beta"'] & \end{tikzcd}$$

Provare che se $s = s(t)$, allora

$$\kappa(s) = \det\begin{bmatrix} T(s) \\ \dot{T}(s) \end{bmatrix} = \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{bmatrix}}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

<u>Soluzione</u>

Sappiamo che $\kappa(s) = \det\begin{bmatrix} \beta'(s) \\ \beta''(s) \end{bmatrix}$

Ora $\dfrac{d\beta}{ds}(s) = \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{ds}$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds}$$

Quindi

$$\det\begin{bmatrix} T(s) \\ T'(s) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \beta'(s) \\ \beta''(s) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \dfrac{d^2t}{ds^2}\cdot\alpha'(t) + \left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 \alpha''(t) \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \dfrac{d^2t}{ds^2}\,\alpha'(t) \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \dfrac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3}\det\begin{bmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{bmatrix}, \quad \text{poiché}$$

$\dfrac{\alpha'}{\|\alpha'(t)\|}$ e $\dfrac{d^2t}{ds^2}\cdot\alpha'(t)$ sono paralleli.

Inoltre abbiamo usato il fatto che

$\dfrac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ e quindi $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\|\alpha'(t)\|}$.

In conclusione la curvatura di una curva regolare $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ si calcola con la formula

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\alpha_1'(t)\,\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\,\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}}$$

Definendo $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) := \det\begin{bmatrix} \alpha_1'(t) & \alpha_2'(t) \\ \alpha_1''(t) & \alpha_2''(t) \end{bmatrix}$

allora $$\kappa(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Curve nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$

Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata rispetto al parametro d'arco: $\alpha'(s)\cdot\alpha'(s) = 1$

Quindi
$$\alpha'(s)\cdot\alpha''(s) = 0$$

Definiamo $k(s) := \|\alpha''(s)\| \geq 0$. $k(s) \in C^0(I)$

Supponiamo $\alpha''(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Allora possiamo definire un riferimento ortonormale concordemente orientato con $\{E1, E2, E3\}$, dove $E1 = (1,0,0)$, $E2 = (0,1,0)$, $E3 = (0,0,1)$ in ogni punto $s \in I$:

poniamo
$$T(s) := \alpha'(s), \quad N(s) := \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) := T(s) \wedge N(s)$$

Quindi $T\cdot T = 1$, $N \cdot N = 1$, $B \cdot B = 1$
$$T\cdot N = T \cdot B = N \cdot B = 0$$

Inoltre
$$\det \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}(s) = 1$$

Il piano $\mathrm{span}\{T(s), N(s)\}$ è detto piano osculatore ad α in $\alpha(s)$.
Il piano $\mathrm{span}\{N(s), B(s)\}$ è detto piano normale ad α in $\alpha(s)$.
Il piano $\mathrm{span}\{B(s), T(s)\}$ è detto piano rettificante ad α in $\alpha(s)$.

Come al solito
$$T\cdot T' = N\cdot N' = B \cdot B' = 0$$
$$T\cdot N' + T'\cdot N = T\cdot B' + T'\cdot B = N \cdot B' + N'\cdot B = 0$$

Poniamo $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ e la chiamiamo curvatura in $\alpha(s)$, quindi $\alpha''(s) = T'(s) = k(s) N(s)$.

Siccome $T \wedge N = B$, otteniamo
$$T' \wedge N + T \wedge N' = B'$$

Ora $T' \parallel N \Rightarrow T' \wedge N = 0$, quindi $B' = T \wedge N'$

Ma allora $B' \perp T$, $B' \perp B \Rightarrow B' \parallel N$.
Dunque esiste una funzione
$$\tau : I \to \mathbb{R}$$
tale che $B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s)$, $\forall s \in I$.

Si ottiene $-N(s) \cdot B'(s) = \tau(s)$, da cui si vede che $\tau(s)$ è una funzione liscia. Naturalmente da $\kappa(s) > 0$ $\forall s \in I$ otteniamo che anche $\kappa : I \to \mathbb{R}$ è liscia.
Siccome $\{T(s), N(s), B(s)\}$ è una base ortonormale, possiamo scrivere:

$$T'(s) = (T'(s) \cdot T(s))T(s) + (T'(s) \cdot N(s))N(s) + (T'(s) \cdot B(s))B(s)$$

$$N'(s) = (N'(s) \cdot T(s))T(s) + (N'(s) \cdot N(s))N(s) + (N'(s) \cdot B(s)) \cdot B(s)$$

$$B'(s) = (B'(s) \cdot T(s))T(s) + (B'(s) \cdot N(s))N(s) + (B'(s) \cdot B(s))B(s)$$

Dalle relazioni precedenti, si conclude che

$$T'(s) = \kappa(s) \cdot N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}(s), \quad \forall s \in I$$

dette equazioni di Frenet - Serret della curva biregolare α (nel punto $\alpha(s)$).

La curvatura e la torsione di una curva biregolare arbitraria $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ sono definite come quelle di una riparametrizzazione unitaria di α. Siano $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ e $\delta : L \to \mathbb{R}^3$ due curve unitarie equivalenti ad α. Allora esiste un diffeomorfismo $\phi : J \to L$ tale che

$$\begin{tikzcd} u \in L \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{R}^3 \\ v \in J \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo, cioè $\gamma = \delta \circ \phi$. Invece di $u = \phi(v)$, scriveremo $u = u(v)$.

Allora

$$\gamma'(v) = u'(v) \cdot \delta'(u).$$

Ora $\|\gamma'(v)\| = \|\delta'(u)\| = 1$, $\gamma'(v) \parallel \delta'(u) \Rightarrow$

$$u'(v) = 1 \quad \forall\, v \in J, \; u = v + c,$$

oppure

$$u'(v) = -1 \quad \forall\, v \in J, \; u = -v + c.$$

L'effetto del cambio $u = \pm v + c$ sui vettori introdotti precedentemente è:

$$T \mapsto \pm T, \quad T' \mapsto T', \quad N \mapsto N$$
$$B \mapsto \pm B, \quad B' \mapsto B'.$$

Quindi $\kappa \mapsto \kappa$ e $\tau \mapsto \tau$, cioè la curvatura e la torsione sono ben ben definite per ogni curva biregolare. Inoltre sono di classe C^∞.

Osserviamo che la torsione è definita se e solo se la curvatura non si annulla mai.
Siccome trovare una riparametrizzazione a velocità unitaria è quasi sempre impossibile, è opportuno avere delle formule per K e τ in funzioni della curva $\alpha(t)$.

<u>Teorema</u> Sia $\alpha(t)$ una curva regolare in $\mathbb{R}^3$. Allora

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

<u>Dim</u>. Sia $s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(z)\| dz$ il parametro d'arco. Allora, con notazioni solite,

$$\left\| \frac{d^2 \beta}{d s^2} \right\| = K_\beta(s).$$

Dobbiamo esprimere $K_\beta(s(t))$ nel parametro t. Ricordiamo che

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad , \quad \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|.$$

Quindi

$$K = \left\| \frac{d^2 \beta}{d s^2} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right) \right\|$$

$$= \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right) \cdot \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha/dt}{ds/dt} \right)}{\frac{ds}{dt}} \right\|$$

(29)

$$= \left\| \frac{\dfrac{\dfrac{ds}{dt}\alpha''(t) - \dfrac{d^2s}{dt^2}\cdot \alpha'(t)}{(ds/dt)^2}}{\dfrac{ds}{dt}} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\dfrac{ds}{dt}\,\alpha''(t) - \dfrac{d^2s}{dt^2}\,\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} \right\|$$

Ora $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t)\cdot\alpha'(t)$, da cui

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)\right).$$ Quindi

$$2\,\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{ds}{dt} = 2\,\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)$$

Pertanto

$$K = \left\| \frac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\alpha''(t) - \dfrac{d^2s}{dt^2}\,\dfrac{ds}{dt}\,\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^4} \right\|$$

$$= \left\| \frac{(\alpha'(t)\cdot\alpha'(t))\,\alpha''(t) - (\alpha'(t)\cdot\alpha''(t))\,\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^4} \right\|$$

Usiamo la relazione tra prodotto scalare e prodotto vettoriale:

$$v \wedge (w \wedge u) = (v\cdot u)\,w - (v\cdot w)\cdot u$$

dove $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Dunque $\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \alpha') = (\alpha'\cdot\alpha')\,\alpha'' - (\alpha'\cdot\alpha'')\,\alpha'$.

Siccome $\alpha' \perp (\alpha'' \wedge \alpha')$, otteniamo

$$\|\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \alpha')\| = \|\alpha'\| \, \|\alpha' \wedge \alpha''\|$$

Quindi:

$$K(t) = \frac{\|(\alpha'(t)\cdot\alpha'(t))\alpha''(t) - (\alpha'(t)\cdot\alpha''(t))\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^4}$$

$$= \frac{\|\alpha'(t)\| \, \|\alpha''(t)\wedge\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^4} = \frac{\|\alpha''(t)\wedge\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

— · —

<u>Esercizio</u> Dimostrare che

$$v \wedge (w \wedge u) = (v\cdot u)w - (v\cdot w)u$$

<u>Sol</u>. Sia $v = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^{3} z_j e_j$, $u = \sum_{k=1}^{3} y_k e_k$, dove $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Sostituiamo

$$\left(\sum x_i e_i\right) \wedge \left(\left(\sum z_j e_j\right) \wedge \left(\sum y_k e_k\right)\right)$$

$$= \sum x_i z_j y_k \, (e_i \wedge (e_j \wedge e_k))$$

Assumiamo che la formula valga per i vettori della base canonica:

$$e_i \wedge (e_j \wedge e_k) = (e_i \cdot e_k) e_j - (e_i \cdot e_j) e_k$$

Allora la somma precedente diventa:

$$\sum x_i z_j y_k (e_i \cdot e_k) e_j$$

$$- \sum x_i z_j y_k (e_i \cdot e_j) e_k$$

$$= \left(\left(\sum x_i e_i\right)\cdot\left(\sum y_k e_k\right)\right)\left(\sum z_j e_j\right)$$

$$-\left(\left(\sum x_i e_i\right)\cdot\left(\sum z_j e_j\right)\right)\left(\sum y_k e_k\right)$$

$$= (v\cdot w)u - (v\cdot u)w.$$

Basta provare che

$$e_i\wedge(e_j\wedge e_k) = (e_i\cdot e_k)e_j - (e_i\cdot e_j)e_k.$$

Se $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, cioè i,j,k sono distinti, allora

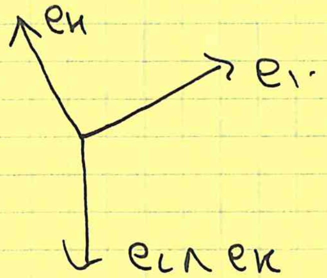
$$e_i \parallel e_j\wedge e_k \Rightarrow e_i\wedge(e_j\wedge e_k)=0$$

$e_i\cdot e_j = 0$, $e_i\cdot e_k=0$, quindi l'identità è vera.

$j=k$, $i\neq j=k \Rightarrow e_j\wedge e_k = 0$

$e_i\cdot e_j = e_i\cdot e_k = 0$ e l'identità è vera

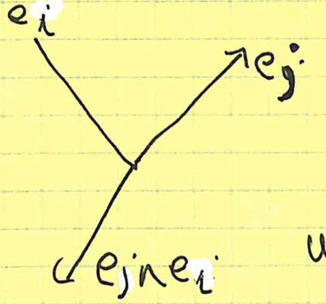
$j\neq k$ $i=j$; $j\neq k$, $i=k$



$i=j$, $j\neq k$

Si vede che $e_i\wedge(e_i\wedge e_k) = -e_k$

mentre $(e_i\cdot e_k)e_i - (e_i\cdot e_i)e_k = -e_k$ O.K



$i=k$, $j\neq k=i$

$$e_i\wedge(e_j\wedge e_i) = e_j$$

mentre $(e_i\cdot e_i)e_j - (e_i\cdot e_j)e_i$

$= e_j$ O.K

<u>Caso $i=j=k$: chiaro.</u>

Teorema. Sia $\alpha(t)$ una curva biregolare in $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

Dim. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t$. Allora

$$\tau = -N \cdot B' = -N \cdot \frac{d\, T \wedge N}{dt} = -N \cdot (T' \wedge N + T \wedge N')$$

$$= -N \cdot (T \wedge N'), \text{ in quanto } N \perp (T' \wedge N).$$

Quindi

$$\tau = -\frac{\alpha''}{k} \cdot \left(\alpha' \wedge \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha''}{k}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{k}\alpha'' \cdot \left(\alpha' \wedge \left(\frac{\alpha'''}{k} - \frac{k'\alpha''}{k^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\alpha'''}{k^2} \cdot (\alpha' \wedge \alpha'')$$

in quanto $\alpha'' \cdot (\alpha' \wedge \alpha'') = 0$ e

$$\alpha'' \cdot (\alpha' \wedge \alpha''') = \det \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \alpha' \\ \alpha''' \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \alpha''' \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{bmatrix}$$

Siccome $k = \|\alpha''\| = \|\alpha'\| \|\alpha''\| = \|\alpha' \wedge \alpha''\|$, in quanto $\|\alpha'\| = 1$, $\alpha' \perp \alpha''$, allora

$$\tau = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

<u>Caso generale</u> Sia $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ con s parametro d'arco.

Allora la formula per la torsione è

$$\tau = \frac{(\beta'(s) \wedge \beta''(s)) \cdot \beta'''(s)}{\| \beta'(s) \wedge \beta''(s) \|^2}$$

Dobbiamo esprimerla in funzione di $t = t(s)$.

Ora

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\beta}{ds}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\beta}{ds}$$

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d^3\beta}{ds^3} + 3\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{d^3 s}{dt^3}\frac{d\beta}{ds}$$

da cui

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left(\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\right)$$

$$\alpha''' \cdot (\alpha' \wedge \alpha'') = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \left(\frac{d^3\beta}{ds^3} \cdot \left(\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\right)\right)$$

Quindi

$$\frac{\alpha''' \cdot (\alpha' \wedge \alpha'')}{\| \alpha' \wedge \alpha'' \|^2} = \frac{\left(\frac{d^3\beta}{ds^3}\right) \cdot \left(\frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\right)}{\left\| \frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\|^2} = \tau. \blacksquare$$

— · —

<u>Esercizio</u> Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare tale che $k(t) > 0$, $\forall\, t \in I$. Provare che $\operatorname{Im}\alpha$ è contenuta in un piano se e solo se la torsione $\tau_\alpha(t) \equiv 0$.

Sol Se $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ è la curva col parametro d'arco $s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \alpha'(u) \| \, du$ equivalente ad α allora $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$, quindi essere in un piano non dipende dalla parametrizzazione

Inoltre $\tau_\beta \equiv 0 \iff \tau_\alpha \equiv 0$

Possiamo supporre che $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = 1, \forall t I$.

Supponiamo che $\operatorname{Im} \alpha \subset H$, dove H è un piano di equazione

$$v \cdot A = d, \text{ dove } A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ è}$$

un vettore con $\|A\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$, $d \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y, z)$ varia in $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Im} \alpha \subset H \Rightarrow \alpha(t)$ soddisfa l'equazione

$$v \cdot A = d,$$

dunque

$$\alpha(t) \cdot A = d, \quad \forall t I$$

Da cui

$$\alpha'(t) \cdot A = 0, \quad \alpha''(t) \cdot A = 0, \forall t \in I$$

Siccome $\alpha'' = kN$, si ha $k(N \cdot A) = 0$

cioè $N \cdot A = 0$, poiché $k \neq 0$. Quindi $N \perp A$ e dunque, da $N \perp A$, $T \perp A$, segue che $B = T \wedge N$ è parallelo ad A. Siccome $\|A\| = 1$, $\|B(t)\| = 1$, il vettore $B(t) = A$ oppure $B(t) = -A$. In ogni caso $B(t)$ è costante, $B'(t) \equiv 0$ e quindi $\tau(t) = -N(t) \cdot B'(t) \equiv 0$. Viceversa se $\tau \equiv 0$, allora $B'(t) = \tau(t) N(t) = 0 \Rightarrow B(t) = A$ con A costante. Allora

$$\frac{d(\alpha(t) \cdot B(t))}{dt} = \alpha'(t) \cdot B(t) + \alpha(t) \cdot B'(t)$$

$= T(t) \cdot B(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) \cdot B = d$, con $d \in \mathbb{R}$. Vuol dire che $\operatorname{Im} \alpha \subset \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot B = d\}$ ∎

<u>Oss.</u> Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare.
Sia dato il solito diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \\ J \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

dove h è l'inverso del diffeomorfismo

$$s: t \mapsto \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du, \quad s: I \to J.$$

Allora abbiamo un diagramma per le curvature:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "K_\alpha"] & \mathbb{R} \\ J \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "K_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

tale che $K_\alpha(h(s)) = K_\alpha(t) = K_\beta(s)$
e un diagramma per le torsioni se α è biregolare:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tau_\alpha"] & \mathbb{R} \\ J \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\tau_\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(h(s)) = \tau_\alpha(t)$$

<u>Esercizio</u> Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con $\tau_\alpha \equiv 0$ e $K_\alpha =$ costante.
Allora $\operatorname{Im}\alpha \subset C$, dove C è un cerchio in (un piano di $\mathbb{R}^3$).
Sol. $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$ e le osservazioni precedenti ci permettono di lavorare su β.
Intanto sappiamo che $\tau_\beta \equiv 0$ implica che $B'(s) \equiv 0$, cioè il versore B è costante e $\operatorname{Im}\beta$ giace in un piano H perpendicolare ad H.

Ora $N'(s) = -K\,T(s) + \tau B(s) = -K\,T(s)$
dice che
$$T(s) + \frac{N'(s)}{K} = 0$$
cioè $\frac{d}{ds}\left(\beta(s) + \frac{N(s)}{K}\right) = 0$. Quindi

$\beta(s) + \frac{N(s)}{K} = v_0$, v_0 vettore che non dipende da s. Otteniamo

$\|\beta(s) - v_0\| = \left\|-\frac{N(s)}{K}\right\| = \frac{1}{K}$ (nota che $K>0$).

Quindi $\operatorname{Im}\beta \subseteq \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v - v_0\| = 1/K\}$

S = Sfera di centro v_0 e raggio $1/K$.

Dunque $\operatorname{Im}\beta \subset S \cap H = C$, cerchio ■

— · —

<u>Esercizio</u>. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto al parametro d'arco. Supponiamo la curvatura e la torsione entrambe costanti. Allora α è (un pezzo di) un'elica circolare. Poniamo $\tau_\alpha = \tau$, $k_\alpha = K$

Sol. Se $\tau = 0$, allora $\operatorname{Im}\alpha$ è un arco di cerchio, dunque un arco di elica circolare con passo 0.

Supponiamo $\tau \neq 0$. Calcoliamo la curvatura e la torsione dell'elica così definita:

$\tilde{\alpha}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $b \neq 0$.

Allora
$$K_{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{|a|}{a^2+b^2}, \quad \tau_{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Se scegliamo a, b tali che $K = \frac{|a|}{a^2+b^2}$

$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$, allora a meno di isometria diretta abbiamo che $\alpha \equiv \tilde{\alpha}$ ◻ (Segue da T.F.T.L.C)

<u>Teorema</u> (Teorema fondamentale della teoria locale delle curve)
Siano $k_0, \tau_0 : I \to \mathbb{R}$ due funzioni lisce su un intervallo I (aperto) con $k_0(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Allora esiste una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ liscia e regolare tale che s è il parametro d'arco, $k_0(s)$ e $\tau_0(s)$ sono la curvatura e la torsione di α.
Inoltre un'altra curva $\hat{\alpha}$ che verifica le stesse condizioni si ottiene da α tramite un'isometria diretta di $\mathbb{R}^3$, cioè esistono una rotazione $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e un vettore $c \in \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{\alpha}(s) = A(\alpha(s)) + c$, per ogni $s \in I$.

<u>Dim</u>. Consideriamo il sistema differenziale su $I \times \mathbb{R}^9$:

$$\frac{dx}{ds} = A_0(s)\, x(s), \quad \text{dove}$$

$x(s) = (x_1(s), \dots, x_9(s))$, e

$$A_0(s) = \begin{pmatrix} O_3 & k_0(s) I_3 & O_3 \\ -k_0(s) I_3 & O_3 & \tau_0(s) I_3 \\ O_3 & -\tau_0(s) I_3 & O_3 \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } 9 \times 9$$

dove $O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Osserviamo che il sistema è <u>lineare</u>. Usiamo il seguente <u>Teorema di esistenza e unicità</u>:
Date le condizioni iniziali $s_0 \in I$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^9$ esiste un intervallo aperto $J \subseteq I$ contenente s_0 e un'<u>unica</u> applicazione liscia $f : J \to \mathbb{R}^9$ con $f(s_0) = a$ e $f'(s) = A(s) f(s)$. Inoltre se il sistema è lineare, allora $J = I$.

Scegliamo a tale che $t_0 := (a_1, a_2, a_3)$, $n_0 := (a_4, a_5, a_6)$, $b_0 := (a_7, a_8, a_9)$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata, cioè $\det \begin{bmatrix} t_0 \\ n_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 1$.

Sia $f: I \to \mathbb{R}^9$ l'unica soluzione di

$$\frac{dx}{ds} = A_0(s)\,x(s), \quad \text{con } f(s_0) = a, \ s_0 \in I$$

arbitrario. Definiamo

$$t(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$$

$$n(s) = (f_4(s), f_5(s), f_6(s))$$

$$b(s) = (f_7(s), f_8(s), f_9(s))$$

Osserviamo che $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$.
I tre vettori $t(s), n(s), b(s)$, verificano il sistema, quindi

$$F. \quad \begin{cases} t'(s) = K_0(s)\,n(s) \\ n'(s) = -K_0(s)\,t(s) + \tau_0(s)\,b(s) \\ b'(s) = -\tau_0(s)\,n(s) \end{cases}$$

Consideriamo la matrice

$$M(s) = \begin{bmatrix} t(s)\cdot t(s) & t(s)\cdot n(s) & t(s)\cdot b(s) \\ n(s)\cdot t(s) & n(s)\cdot n(s) & n(s)\cdot b(s) \\ b(s)\cdot t(s) & b(s)\cdot n(s) & b(s)\cdot b(s) \end{bmatrix}$$

Si ha, dalle equazioni F,

$$M'(s) = A(s)\,M(s) - M(s)\,A(s)$$

dove

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K_0(s) & 0 \\ -K_0(s) & 0 & \tau_0(s) \\ 0 & -\tau_0(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre $M(s_0) = I_3$, in quanto $\{t_0, n_0, b_0\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Il sistema lineare $M'(s) = A(s)M(s) - M(s)A(s)$ con la condizione $M(s_0) = I_3$, ha un'unica soluzione su $I \subseteq \mathbb{R}$. Siccome la matrice $L = I_3$, verifica il sistema, allora

$M(s) = L \quad \forall s \in I$. Cioè $M(s)$ è costante $\forall s$.

Quindi
$$t(s)\cdot t(s) = n(s)\cdot n(s) = b(s)\cdot b(s) = 1,$$
$$t(s)\cdot n(s) = t(s)\cdot b(s) = n(s)\cdot b(s) = 0$$
per ogni $s \in I$. Dunque $\{t(s), n(s), b(s)\}$ è una base ortonormale per ogni $s \in I$.

L'applicazione

$$\det : I \to \mathbb{R}, \text{ data da}$$

$\det(s) := \det \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$ è una funzione continua definita sul connesso I a valori in $\{+1, -1\}$.

Siccome $\det \begin{bmatrix} t(s_0) \\ n(s_0) \\ b(s_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} t_0 \\ n_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 1$, allora il valore di det è sempre 1. Perciò $\{t(s), n(s), b(s)\}$ è positivamente orientata per ogni $s \in I$.

Ora definiamo la curva!

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^{s} t(u)\,du, \quad s \in I. \ \alpha \text{ è liscia}$$

in quanto $t(s)$ è liscia, inoltre

$$\alpha'(s) = t(s)$$

dunque $\|\alpha'(s)\| = 1$ ed α è unitaria con parametro d'arco.

Poniamo $T(s) := t(s)$, $s \in I$. Inoltre $T'(s) = t'(s) = k_0(s) n(s)$, quindi $k_\alpha(s) = \|T'(s)\| = k_0(s)$ e $N(s) = n(s)$. Dunque $B(s) = T(s) \wedge N(s) = t(s) \wedge n(s) = b(s)$ e $B'(s) = b'(s) = \tau_0(s) n(s) = \tau_0(s) N(s)$, per cui

$$\tau_\alpha(s) = \tau_0(s). \;\square$$

<u>Unicità</u> Sia $\hat{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ curva che verifica le stesse condizioni. Definiamo $\hat{\hat{\alpha}}(s) = \hat{\alpha}(s) + (\alpha(s_0) - \hat{\alpha}(s_0))$. Allora $\hat{\hat{\alpha}}(s)$ verifica le stesse condizioni e inoltre

$$\hat{\hat{\alpha}}(s_0) = \alpha(s_0).$$

Siccome $\{T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0)\}$ e

$$\{T_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0), N_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0), B_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0)\}$$ sono

positivamente orientati esiste una rotazione $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$A\,[T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0)] = [T_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0), N_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0), B_{\hat{\hat{\alpha}}}(s_0)]$$

Dall'unicità della soluzione del sistema differenziale, si ottiene

$$A T_\alpha(s) = T_{\hat{\hat{\alpha}}}(s), \quad A N_\alpha(s) = N_{\hat{\hat{\alpha}}}(s), \quad A B_\alpha(s) = B_{\hat{\hat{\alpha}}}(s)$$

per ogni $s \in I$.

Allora $$\hat{\hat{\alpha}}(s) = \int_{s_0}^{s} T_{\hat{\hat{\alpha}}}(u)\,du = \int_{s_0}^{s} (A T_\alpha)(u)\,du$$

$$A\left(\int_{s_0}^{s} T_\alpha(u)\,du\right) = A\alpha(s) \;\square$$

Dunque $\hat{\alpha}(s) = A\alpha(s) + c$, con $c = \alpha(s_0) - \hat{\alpha}(s_0)$ $\square$

Superfici in $\mathbb{R}^3$

Tre modi ragionevoli di definire una superficie in $\mathbb{R}^3$ sono i seguenti:

(D1) Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è il grafico di una funzione liscia (= classe C^∞) definita su un aperto U di $\mathbb{R}^2$:

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad \text{cioè}$$

$$S := \{ (x,y,z) \in U \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y) \}$$

è detta la superficie definita da f.

(D2) Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è il luogo di zeri di una funzione liscia definita su un aperto U di $\mathbb{R}^3$:

$$F : U \to \mathbb{R},$$

dove si richiede che $F^{-1}(0) =: S$ sia non vuoto e

$$(\nabla F)(p) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right) \neq (0,0,0)$$

per ogni $p \in S = F^{-1}(0)$.

(D3) Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è l'immagine di una funzione definita su un aperto U di $\mathbb{R}^2$:

$$\sigma : U \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tale che

(1) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono lisce su U.

(2) $\sigma : U \to \sigma(U)$ è un omeomorfismo.

(3) Per ogni $q \in U$, il differenziale

$$d\sigma_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ è iniettivo.}$$

Ricordiamo che $d\varphi_q$ è così definito

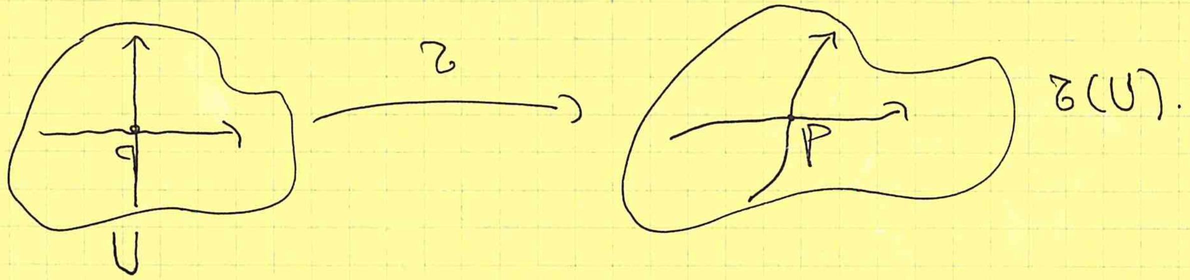
$$d\varphi_q \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\frac{\partial x}{\partial u}(q) + b\frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ a\frac{\partial y}{\partial u}(q) + b\frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ a\frac{\partial z}{\partial u}(q) + b\frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix}$$

Quindi $d\varphi_q$ è iniettivo se e solo se i due vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) = {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q)\right)$

e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) = {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q)\right)$

sono linearmente indipendenti, cioè se e solo se $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \neq 0$.

φ è detta una parametrizzazione locale di ogni punto $p \in \varphi(U)$ e $(u(q), v(q))$ sono le coordinate locali di $p = \varphi(q)$.



È chiaro che nei casi (D1) e (D3) non otteniamo mai superfici compatte.
Inoltre il caso (D1) è un caso particolare del caso (D2): data $f : U \to \mathbb{R}$, poniamo $F(x,y,z) := f(x,y) - z$
Allora $F^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\} \neq \emptyset$
e inoltre $\nabla F(p) = \left(f_x(p), f_y(p), -1\right) \neq (0,0,0)$.

Utilizzeremo il caso (D3) per dare la definizion di superfici in $\mathbb{R}^3$. (42)

<u>Definizione</u>. Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare se per ogni $p \in S$ esiste un intorno aperto W di p in $\mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\tau : U \to \mathbb{R}^3$ liscia, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, tale che

(a) $\tau : U \to V := W \cap S$ è un omeomorfismo

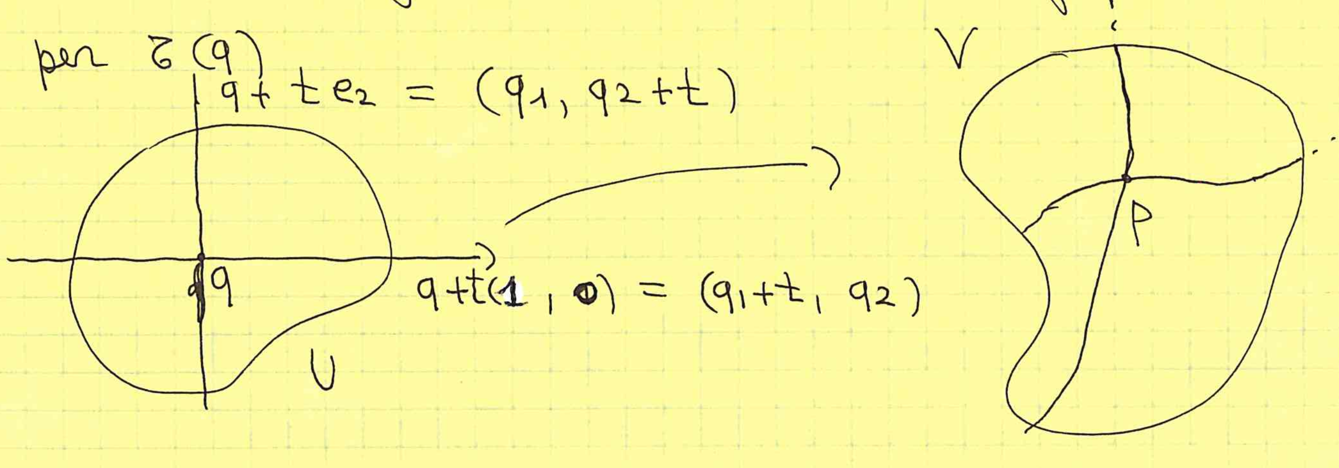
(b) Il differenziale $d\tau_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è iniettivo per ogni $q \in U$.

La tripla $(U \xrightarrow{\tau} V)$ è detta una parametrizzazione locale in p, mentre $(V \xrightarrow{\tau^{-1}} U)$ è detta una carta locale in p. Più semplicemente V è detta una carta in p e $(u(q), v(q)) = (u(\tau^{-1}(p)), v(\tau^{-1}(p)))$, dove $p = \tau(q)$, sono dette le coordinate locali in p. Diremo spesso soltanto superficie.

Se $q \in U$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$, la curva

$$c_j(t) := t \mapsto \tau(q + t e_j), \quad \text{per } j = 1, 2,$$

è detta la j-esima curva coordinata passante per $\tau(q)$



Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie, allora S possiede un ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ fatto di carte locali:

$$U_\alpha \xrightarrow{\sigma_\alpha} V_\alpha \subset V$$

$$S = \bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha \quad , \quad \underline{\{V_\alpha\}_{\alpha\in J} \text{ è detto un atlante di } S.}$$

<u>Esempio 1</u>. Sia U un aperto in $\mathbb{R}^2$ e $f: U \to \mathbb{R}$ una funzione liscia. Poniamo $S := Gr(f) = \{(x,y,z) \in U\times\mathbb{R} \mid z = f(x,y)\}$. Allora S è una superficie ricoperta da una sola carta. Infatti definiamo

$$\sigma : U \to \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \sigma(u,v) := (u, v, f(u,v))$$

Allora $\Im m\, \sigma = S$. σ è liscia perché lo sono u, v, f.

(1) $\sigma(u,v) = \sigma(u_1,v_1) \Rightarrow u = u_1,\ v = v_1$, cioè σ è iniettiva.

Quindi σ è una bigezione da U su $\sigma(U) = S$. L'inversa $\sigma^{-1}: (x,y,z) \in S \mapsto (x,y)$ è la restrizione della proiezione $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$ a S. Quindi è continua. Dunque $\sigma: U \to S$ è un omeomorfismo.

(2) $d\sigma_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(q) & \frac{\partial f}{\partial v}(q) \end{bmatrix}$ ha rango 2, $\forall q \in U$

dunque

$$d\sigma_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

è iniettivo per ogni $q \in U$.

<u>Esempio 2</u> Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ aperto, sia $F: W \to \mathbb{R}$ liscia. Poniamo $S := \{(x,y,z) \in W \mid F(x,y,z) = 0\}$.

Supponiamo $S \neq \emptyset$. Se

$$\mathrm{grad} F(p) = \nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p)\right) \neq (0,0,0)$$

per ogni $p \in S$, allora S è una superficie.

Dim. Sia $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Poiché

$$\nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p)\right) \neq (0,0,0)$$

allora possiamo assumere che $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$.

Il Teorema della funzione implicita stabilisce che in tale situazione esiste un intorno aperto $W_0 \subset W$ di p, un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) e una funzione liscia $g: U \to \mathbb{R}$ tale che

$$S \cap W_0 = \{(x, y, g(x,y)) \mid (x,y) \in U\} = Gr(g) \subset U \times \mathbb{R}.$$

Poniamo $\sigma : U \to V \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $V = S \cap W_0 \subseteq S$ e $\sigma(u, v) := (u, v, g(u,v))$.

Ragionando come in Ex 1, abbiamo che

$(U \xrightarrow{\sigma} V)$ è una parametrizzazione in p.

Siccome $\nabla F(p) \neq 0$, ogni $p \in S$ ha una tale parametrizzazione e quindi S è ricoperta da carte.

Esempio 3 (Ellissoide) Consideriamo

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

con a, b, c numeri reali non nulli.

Poniamo $W := \mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Allora

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\} = F^{-1}(0)$$

Si ha $\nabla F = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$, il quale si annulla solo in $(0,0,0)$. Ma $(0,0,0) \notin S$. Quindi S è una superficie (= superficie regolare).

<u>Esempio 4</u> Nota che l'ellissoide è anche ottenuto come luogo di zeri di

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)^2$$

Cioè $S = F^{-1}(0)$, dove $F(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)^2$

Abbiamo

$$(\nabla F)(x,y,z) = 2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\cdot\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$$

$= 0$ se e solo se (x,y,z) verifica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ oppure $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Cioè ∇F è identicamente nullo su S! Ciò nonostante, l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie. In conclusione la condizione ∇F non si annulla su S è sufficiente ma non necessaria perché S sia una superficie.

<u>Esempio 5</u>. (La sfera). La sfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, che è un ellissoide è definita da

$$x^2+y^2+z^2-1=0,$$ cioè

$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|^2 = 1\}$. Sappiamo che è una superficie. Vediamo di trovare un ricoprimento di S^2 con carte aperte. Naturalmente una sola carta non basta:

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^2, \quad \sigma(U) = S^2$$

direbbe che S^2 è omeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Quindi U sarebbe compatto e dunque chiuso in $\mathbb{R}^2$. Ma l'unico aperto e chiuso non vuoto di $\mathbb{R}^2$ è $\mathbb{R}^2$ stesso, in quanto $\mathbb{R}^2$ è connesso.
Dunque servono almeno due carte. Il primo esempio sarà con 6. (Poi ne vedremo uno con 2.)

Da $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, abbiamo che

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Se prendiamo $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$
allora

$$\tau_1 : (u,v) \in U \longmapsto (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$\tau_2 : (u,v) \in U \longmapsto (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$$

sono due carte su S^2: la calotta aperta superiore e quella inferiore.

Da $y^2 = 1 - x^2 - z^2$, $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$
abbiamo altre due carte

$$\tau_3 : (u,v) \mapsto (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

$$\tau_4 : (u,v) \longmapsto (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

e infine da $x^2 = \sqrt{1-y^2-z^2}$, otteniamo

$$\tau_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) \quad \text{e}$$

$$\tau_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v).$$

Chiaramente $S^2 = \bigcup_{i=1}^{6} \tau_i(U)$
implica che S^2 è una superficie (regolare).

Esercizio. Sia $v \in \mathbb{R}^3$ con $\|v\|=1$.
La formula
$$T(u) := v \wedge u + (u \cdot v) v$$
definisce una trasformazione ortogonale.

Sol. Vediamo che T è lineare e che
$$\langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^3.$$

T è lineare

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = v \wedge (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + ((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \cdot v) v$$

$$= \alpha_1 v \wedge u_1 + \alpha_2 v \wedge u_2 + \alpha_1 (u_1 \cdot v) v + \alpha_2 (u_2 \cdot v) v$$

$$= \alpha_1 (v \wedge u_1 + (u_1 \cdot v) v) + \alpha_2 (v \wedge u_2 + (u_2 \cdot v) v)$$

$$= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) : \text{fine.}$$

Usiamo
$$\langle T(u+w), T(u+w) \rangle = \langle T(u), T(u) \rangle + \langle T(w), T(w) \rangle + 2 \langle T(u), T(w) \rangle$$

da cui
$$\langle T(u), T(w) \rangle = \frac{1}{2} \Big(\langle T(u+w), T(u+w) \rangle - \langle T(u), T(u) \rangle - \langle T(w), T(w) \rangle \Big)$$

Dunque se vale che $\|T(u)\| = \|u\|$ $\forall u \in \mathbb{R}^3$, allora vale anche che $\langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle$ $\forall u, w \in \mathbb{R}^3$. Basta dunque provare che T conserva la lunghezza dei vettori

(48) BIS

Si ha

$\langle T(u), T(u)\rangle = T(u)\cdot T(u)$

$= (v\wedge u + (u\cdot v)v)\cdot(v\wedge u + (u\cdot v)v)$

$= \|v\wedge u\|^2 + (v\cdot v)(u\cdot v)^2$, poiché

$v\wedge u \perp (u\cdot v)v$

Quindi $T(u)\cdot T(u) = \|v\wedge u\|^2 + (u\cdot v)^2$, poiché $\|v\|=1$, per ipotesi.

Ora $\|v\wedge u\|^2 = \|v\|^2\|u\|^2 - (u\cdot v)^2$, da cui

$T(u)\cdot T(u) = \|v\|^2\cdot\|u\|^2 = \|u\|^2$ C.V.D.

Osserviamo che $T(v) = (v\wedge v + \|v\|^2\cdot v)$

$= v$

dunque v è un autovettore con autovalore 1

La retta $L = \{tv \mid t\in\mathbb{R}\}$ è

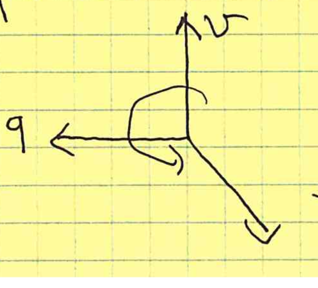
l'asse della trasformazione lineare ortogonale.

Sia $q\in\langle v\rangle^\perp = \{w\in\mathbb{R}^3 \mid w\cdot v = 0\}$

Allora $T(q) = v\wedge q + (q\cdot v)v$

$= v\wedge q$, in quanto $q\cdot v = 0$

Pertanto il vettore q che sta nel piano ortogonale a v viene ruotato di $\pi/2$ rad.



Quindi la "rotazione" è antioraria e T è una rotazione!

Esempio. Si consideri la curva così parametrizzata

$$\alpha(t) = (t^2-1,\ t^3-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\alpha'(t) = (2t,\ 3t^2-1) \neq (0,0),\ \forall t$$

$$\alpha''(t) = (2,\ 6t) \neq (0,0),\ \forall t$$

Quindi α è regolare. La curvatura è

$$\frac{\det\begin{bmatrix}\alpha'(t)\\ \alpha''(t)\end{bmatrix}}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det\begin{bmatrix}2t, & 3t^2-1\\ 2, & 6t\end{bmatrix}}{\left(\sqrt{4t^2+9t^4-6t^2+1}\right)^3}$$

$$= \frac{12t^2-6t^2+2}{\left(\sqrt{9t^4-2t^2+1}\right)^3} = \frac{6t^2+2}{\left(\sqrt{9t^4-2t^2+1}\right)^3} > 0$$

Un'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}\,\alpha$ è:

$$x = t^2-1, \quad y = t^3-t$$

$$\Rightarrow t^2 = 1+x, \quad y = tx \Rightarrow y^2 = t^2x^2 = x^3+x^2$$

Quindi

$$\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \{y^2 = x^3+x^2\}$$

Osserviamo che $\alpha(-1) = \alpha(1) = (0,0)$

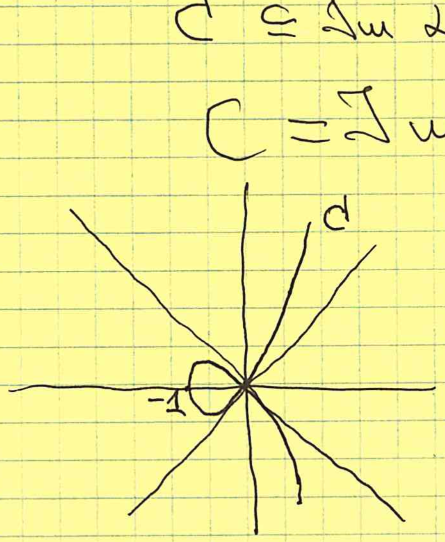
Se $x \neq 0$, allora ponendo $t = \frac{y}{x}$

otteniamo che un punto $(x,y) \in C$ si rappresenta come $(t^2-1,\ t^3-1)$, cioè

$$C \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha, \text{ da cui}$$

$$C = \mathrm{Im}\,\alpha$$

C:



<u>Esercizio</u> Provare che se $v, w \in \mathbb{R}^3$, si ha
$$(v \wedge w)\cdot(v \wedge w) = (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2$$
Nota che
$$(v \wedge w)\cdot(v \wedge w) = (w \wedge v)\cdot(w \wedge v).$$

<u>Sol</u>. Forza bruta!
$(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2$
$$= \left(\sum_{i=1}^{3} v_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{3} w_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{3} v_i w_i\right)^2$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} v_i^2 w_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} v_i^2 w_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 3} v_i w_i v_j w_j\right)$$
$$= \sum_{i\neq j} v_i^2 \cdot w_j^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 3} v_i w_i v_j w_j \, ;$$

$(v \wedge w)\cdot(v \wedge w)$
$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2$$
$$= v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 + v_3^2 w_1^2 + v_1^2 w_3^2 + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2$$
$$- 2(v_2 w_2 v_3 w_3 + v_1 w_1 v_3 w_3 + v_1 w_1 v_2 w_2)$$
$$= \sum_{i\neq j} v_i^2 w_j^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 3} v_i w_i v_j w_j$$

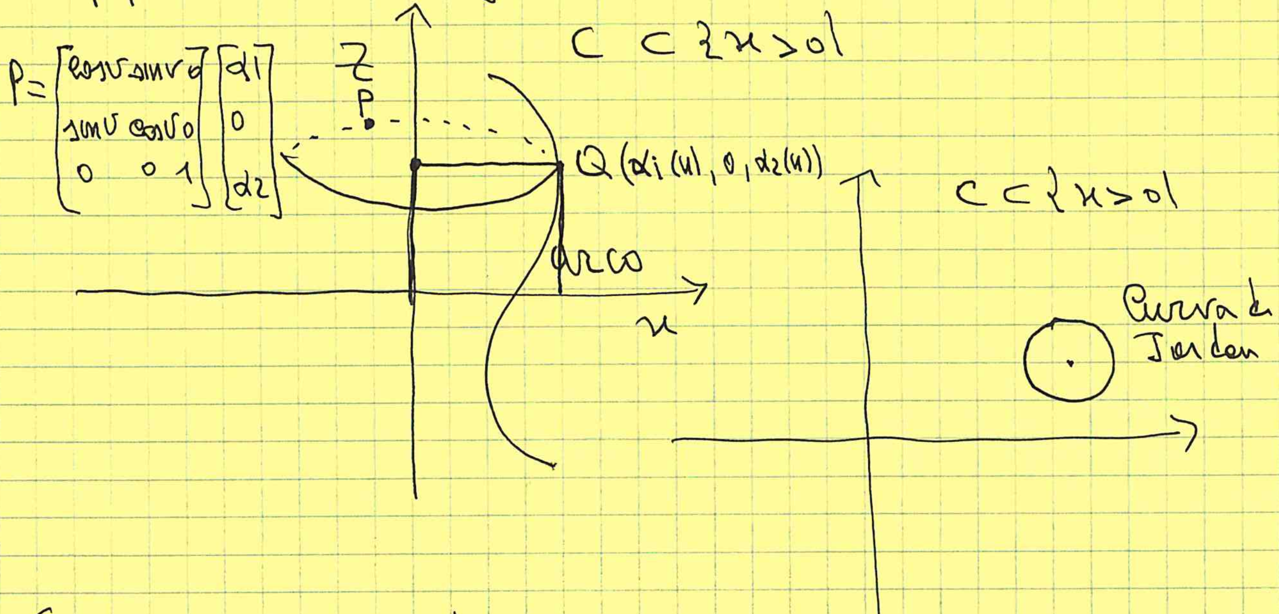
Quindi $(v \wedge w)\cdot(v \wedge w) = (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2$.

Siccome $\exists!\ \theta$ con $0 \le \theta \le \pi$ tale che
$v \cdot w = \|v\|\,\|w\| \cos\theta$, si ottiene
$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2\cos^2\theta$$
$$= \|v\|^2\|w\|^2 \sin^2\theta \Rightarrow \|v \wedge w\| = \|v\|\,\|w\| \sin\theta \ \square$$

Superficie di rotazione o rivoluzione.

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ di rotazione si ottiene ruotando una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$ contenuta in un piano H attorno a una retta $L \subset H$ con $L \cap C = \phi$, dove C è o un arco di Jordan oppure una curva di Jordan (chiusa); cioè C è il sostegno di una curva liscia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dove I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ nel caso di arco di Jordan e $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ stabilisce un omeomorfismo tra I e $C = \operatorname{Im} \alpha$, invece $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ nel caso di curva chiusa di Jordan e $\alpha|_{[a,b)}$, $\alpha|_{(a,b]}$ sono iniettive.
Usando una isometria di $\mathbb{R}^3$ possiamo supporre $H = \{y=0\}$, $L = \{x=y=0\} = $ Asse Z

$C \subset \{x>0\}$



Supponiamo che $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ sia data da

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u), 0, \alpha_2(u)) \quad \alpha_1(u) > 0$$

Se $Q = (\alpha_1(u), 0, \alpha_2(u)) \in C$ è ruotato di angolo v, $0 \leq v < 2\pi$, allora

Otteniamo il punto

$$\begin{bmatrix} \cos v \cdot \alpha_1(u) \\ \sin v \cdot \alpha_1(u) \\ \alpha_2(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(u) \\ 0 \\ \alpha_2(u) \end{bmatrix}$$

Quindi il generico punto di S è parametrizzato con

$$(\alpha_1(u) \cdot \cos v, \alpha_1(u) \cdot \sin v, \alpha_2 u)$$

L'applicazione

$\varphi : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ data da

$\varphi(u,v) = (\alpha_1(u) \cdot \cos v, \alpha_1(u) \cdot \sin v, \alpha_2(u))$

è una parametrizzazione di S.

Se C ha come equazione cartesiana

$$f(x, z) = 0$$

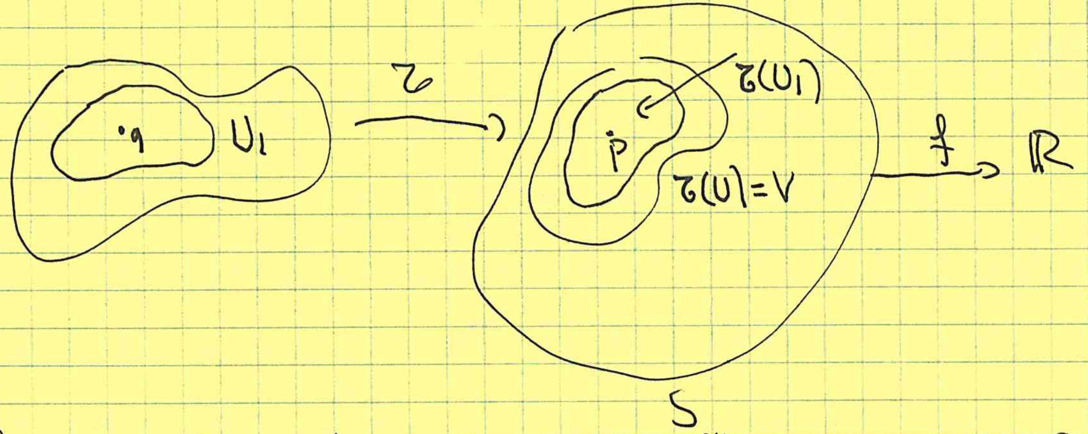
allora un'equazione cartesiana della superficie di rotazione è

$$\boxed{f\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0}$$

(Magari otteniamo superfici con punti non regolari, ma sono comunque delle genuine superfici!).

Applicazioni differenziabili

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Una funzione $f: S \to \mathbb{R}$ è liscia in p se esiste una parametrizzazione locale $\tau: U \to S$ in p tale che $f \circ \tau: U \to \mathbb{R}$ è liscia in un intorno $U_1 \subset U$ di $q = \tau^{-1}(p)$.



$f: S \to \mathbb{R}$ è detta di classe C^∞ o liscia su S se lo è in ogni punto di S. Siccome $\tau^{-1}: \tau(U) \to U$ è continua, la composizione $f = (f \circ \tau) \circ \tau^{-1}: \tau(U_1) \to \mathbb{R}$ è continua. Quindi $f: S \to \mathbb{R}$ liscia $\Rightarrow$ f è continua.

<u>Oss.</u> Se S è una superficie e $(U_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} V_\alpha)$ è un atlante di S, $S = \bigcup_\alpha V_\alpha = \bigcup_\alpha \tau_\alpha(U_\alpha)$ allora ogni aperto $W \subseteq S$ è anche una superficie con atlante

$$\left(U_\alpha \cap \tau_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow V_\alpha \cap W \right),$$

$$W = W \cap S = \bigcup_\alpha (V_\alpha \cap W).$$

Scriveremo $f(u,v)$ invece di $(f \circ \tau)(u,v)$.
Se $U \xrightarrow{\tau} S$ e $U \xrightarrow{s} S$ sono due parametrizzazioni in p, allora dalle relazioni

$f \circ s = (f \circ \tau)(\tau^{-1} \circ s)$, $f \circ \tau = (f \circ s)(s^{-1} \circ \tau)$

si deduce che $f \circ s$ è liscia in un intorno di $s^{-1}(p)$ se e solo se $f \circ \tau$ è liscia in un intorno di $\tau^{-1}(p)$, Se riusciamo prima a dimostrare che

$$h = \tau^{-1}\circ s\big|_{s^{-1}(s(V)\cap\tau(U))} : s^{-1}(s(V)\cap\tau(U)) \to \tau^{-1}(s(V)\cap\tau(U))$$

e

$$K = s^{-1}\circ\tau\big|_{\tau^{-1}(s(V)\cap\tau(U))} : \tau^{-1}(s(V)\cap\tau(U)) \to s^{-1}(s(V)\cap\tau(U))$$

sono entrambe lisce come applicazioni da aperti di $\mathbb{R}^2$ in aperti di $\mathbb{R}^2$.

Dim. Basta vederlo per h (per K è analogo). h è un omeomorfismo con inverso K. Quindi ci basta vedere che h è liscio. Sia $\Omega := s(V)\cap\tau(U)\subset S$. Prendiamo $x_0\in s^{-1}(\Omega)\subseteq\mathbb{R}^2$, $y_0 = h(x_0)\in\tau^{-1}(\Omega)\subseteq\mathbb{R}^2$, $p = s(x_0)=\tau(y_0)$. Esiste un intorno Z di p in $\mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\phi: Z\to\mathbb{R}^2$ liscia (vedi Abate pag 130), tale che $\phi|_{Z\cap S}\equiv\tau^{-1}$. Siccome s è continua esiste un intorno T di x_0 tale che $s(T)\subset Z$. Quindi $h|_T = \tau^{-1}\circ s|_T = \Phi\circ s|_T$ e quindi h è liscia in un intorno di x_0. Siccome x_0 è generico, h è liscia ovunque. ■

Definizione. Siano S e $\hat S$ due superfici in $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione $f: S\to\hat S$ continua è detta liscia (o di classe C^∞) in $p\in S$, se esistono una carta $U\xrightarrow{\tau}V\subset S$ intorno a p e una carta $\hat U\xrightarrow{\hat\tau}\hat V\subset\hat S$ intorno a $f(p)=q$ tale che

$$\hat\tau^{-1}\circ f\circ\tau$$

è liscia.

Nota che $\hat\tau^{-1}\circ f\circ\tau$ è definita sull'aperto $\tau^{-1}(\tau(U)\cap f^{-1}(\hat U))$ di $\mathbb{R}^2$. Se f è un omeomorfismo con

f^{-1} liscia, diremo che $f: S \to \hat{S}$ è un diffeomorfismo, e che S e $\hat{S}$ sono diffeomorfe.

<u>Oss.</u> Sia $U \xrightarrow{\sigma} \sigma(U) \subset S$ una parametrizzazione locale. Allora σ è un diffeomorfismo tra U e $\sigma(U)$. Intanto σ è un omeomorfismo. Sia $p \in U$. Come carta intorno a p usiamo $U \xrightarrow{Id} U$. Come carta intorno a $\sigma(p) \in \sigma(U)$, usiamo la stessa $U \xrightarrow{\sigma} \sigma(U)$. Basta vedere che

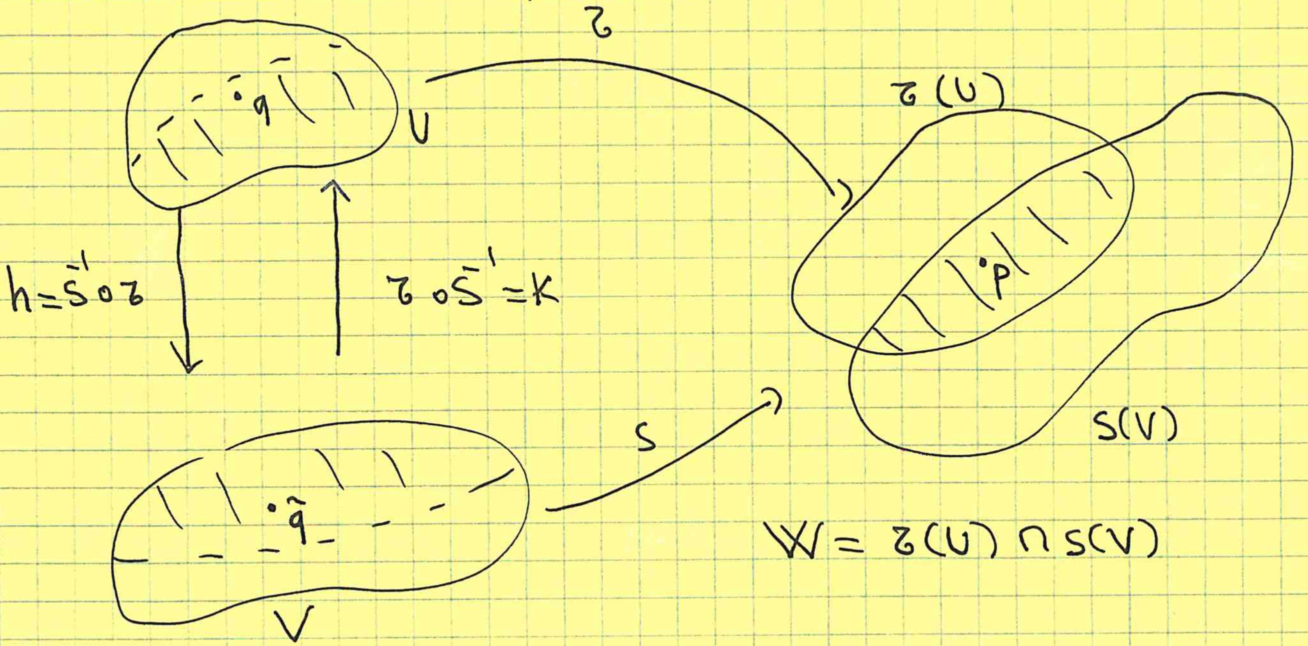
$$Id = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ Id \quad e \quad Id \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = Id$$

sono lisce, il che è chiaro.

<u>Oss.</u> Sia p un punto di una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$$U \xrightarrow{\sigma} \sigma(U) \ni p \quad e \quad V \xrightarrow{s} s(V) \ni p$$

due carte intorno a p.



$W = \sigma(U) \cap s(V)$

Quindi da ciò che abbiamo visto segue che h e K sono diffeomorfismi:

$$h: \sigma^{-1}(W) \to s^{-1}(W), \quad K: s^{-1}(W) \to \sigma^{-1}(W)$$

Espressioni locali sono

$$h(u,v) = (\hat{u}(u,v), \hat{v}(u,v)), \quad K(\hat{u},\hat{v}) = (u(\hat{u},\hat{v}), v(\hat{u},\hat{v}))$$

Se $f: S \to \hat{S}$ è un'applicazione liscia tra superfici, allora scriveremo

$$(\hat{z}^{-1} \circ f \circ z)(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v)) \text{ con}$$
$$\hat{u} = \alpha(u,v), \quad \hat{v} = \beta(u,v).$$

Abbreviando, scriveremo $f(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v))$.

-.-

PIANO TANGENTE

Un modo naturale di studiare una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è attraverso lo studio delle curve liscie contenute in essa, i loro vettori tangenti, e la loro curvatura. Fissiamo un punto $p \in S$.

Definizione Un vettore tangente ad S in $p \in S$ è un vettore tangente a una curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ in p passante per p con $\operatorname{Im} \alpha \subset S$.

In altre parole $v \in \mathbb{R}^3$ è tangente ad S in p se esiste una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ con $\operatorname{Im} \alpha \subset S$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Definizione Poniamo
$T_pS := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \text{ è tangente ad } S \text{ in } p\}$.

T_pS è detto il piano (vettoriale) tangente a S in p.

Teorema. Sia $z: U \to V \subseteq S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione in p. Allora, se $z(q) = p$, si ha

$$T_pS = dz_q(\mathbb{R}^2)$$

Dim. Sia $\alpha: I \to S$ una curva liscia con $\operatorname{Im} \alpha \subset z(U)$. Allora possiamo scrivere

$\alpha(t) = \tau(u(t), v(t))$, dove $u(t)$ e $v(t)$ sono funzioni lisce. Infatti basta porre $\beta(t) = \tau^{-1} \circ \alpha(t)$ per $t \in I$. Allora $\alpha(t) = (\tau \circ \beta)(t) = \tau(u(t), v(t))$, dove $\beta(t) = (u(t), v(t))$.

Vediamo che $T_pS \subseteq d\tau_q(\mathbb{R}^2)$

Sia $v \in T_pS$. Allora esiste $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Eventualmente restringiamo ε e la continuità di α ci permette di supporre che $\operatorname{Im} \alpha \subset V = \tau(U)$.

Se $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, abbiamo

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \frac{\partial \tau}{\partial u}(u(t), v(t)) + \frac{dv}{dt}(t) \frac{\partial \tau}{\partial v}(u(t), v(t))$$

Pertanto

$$\alpha'(0) = \frac{d\alpha}{dt}(0) = u'(0) \frac{\partial \tau}{\partial u}(u(0), v(0)) + v'(0) \frac{\partial \tau}{\partial v}(u(0), v(0))$$

$$= u'(0)\tau_u(q) + v'(0)\tau_v(q), \text{ in quanto}$$

$$(u(0), v(0)) = \beta(0) = \tau^{-1} \circ \alpha(0) = \tau^{-1}(p) = q.$$

Dunque

$v = \alpha'(0)$ è combinazione lineare dei vettori $\frac{\partial \tau}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \tau}{\partial v}(q)$, cioè

$$v \in \operatorname{Span}\left\langle \frac{\partial \tau}{\partial u}(q), \frac{\partial \tau}{\partial v}(q) \right\rangle = d\tau_q(\mathbb{R}^2).$$

Viceversa, sia $\lambda \tau_u(q) + \mu \tau_v(q) \in d\tau_q(\mathbb{R}^2)$

Poniamo

$$\alpha(t) = \tau(u(0) + \lambda t, v(0) + \mu t), \quad |t| < \varepsilon.$$

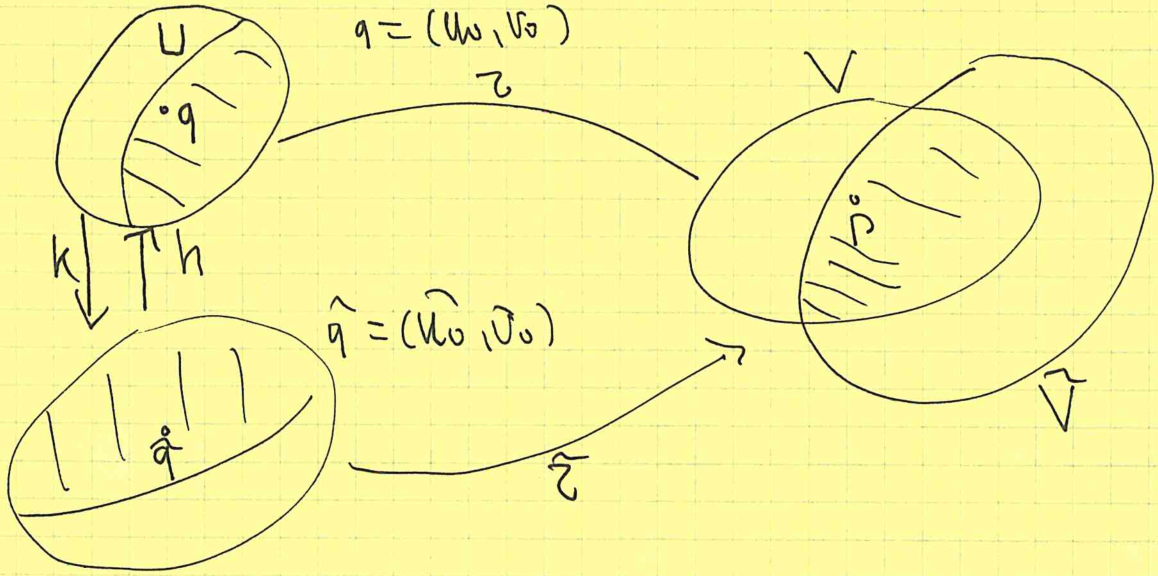
Allora α è liscia, $\operatorname{Im} \alpha \subset \tau(U) \subset V$ per ε piccolo, $\alpha(0) = \tau(u(0), v(0)) = \tau(q) = p$ e

$$\alpha'(0) = \lambda \tau_u(q) + \mu \tau_v(q).$$

Dunque $d\tau_q(\mathbb{R}^2) \subseteq T_pS$. In conclusione $T_pS = d\tau_q(\mathbb{R}^2)$

Proposizione T_pS non dipende dalla parametrizzazione di S in p.

Dim. Siano $\sigma : U \to S$, $\sigma(u_0, v_0) = p$
$\hat{\sigma} : \hat{U} \to S$, $\sigma(\hat{u}_0, \hat{v}_0) = p$
due parametrizzazioni intorno a p.



Allora
$$\hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v}) = (\sigma \circ \sigma^{-1}) \hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v})$$
$$= \sigma((\sigma^{-1} \circ \hat{\sigma})(\hat{u}, \hat{v}))$$
$$= \sigma(h(\hat{u}, \hat{v})) = \sigma(u(\hat{u}, \hat{v}), v(\hat{u}, \hat{v}))$$

Si ha
$$\hat{\sigma}_{\hat{u}} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \hat{u}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \hat{u}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{v}} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \hat{v}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \hat{v}}$$

Cioè
$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{u}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \hat{u}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{v}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Siccome $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \hat{u}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{v}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{v}} \end{bmatrix}$ è invertibile, si ottiene che

$$\mathrm{Span}\langle \hat{\sigma}_{\hat{u}}, \hat{\sigma}_{\hat{v}} \rangle = \mathrm{Span}\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$$

che è quello che volevamo ∎

Consideriamo due superfici $S, \tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$. Sia $f: S \to \tilde{S}$ un'applicazione liscia. Fissiamo $p \in S$ e sia $\tilde{p} = f(p) \in \tilde{S}$.
Vogliamo definire il differenziale di f in p.

<u>Definizione</u> Sia $v = \alpha'(0)$ un vettore tangente a S in p. Allora definiamo un'applicazione

$$df_p : T_pS \to T_{\hat{p}}\hat{S}$$

tramite la formula

$$df_p(v) := \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}$$

Nota che $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \hat{S}$ è una curva liscia contenuta in $\hat{S}$ e ha senso dire che $df_p(v)$ è un vettore tangente a $\hat{S}$ in $\hat{p}$ in quanto $(f \circ \alpha)(0) = f(p) = \hat{p}$.

<u>Teorema</u>. L'applicazione $df_p : T_pS \to T_{\hat{p}}\hat{S}$ è ben definita e lineare.

<u>Dim</u>. Sia $U \xrightarrow{\sigma} S$ una carta in S tale che $\mathrm{Im}\,\alpha \subset U$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w \in T_pS$. Sia $\hat{U} \xrightarrow{\hat{\sigma}} \hat{S}$ una carta in $\hat{S}$ tale che $f(\sigma(U)) \subseteq \hat{\sigma}(\hat{U})$ (possibile in quanto f è continua). $\left[f(\sigma(U)) \subset \hat{\sigma}(\hat{U}) \right]$
Se $w = \lambda \sigma_u + \mu \sigma_v$, dobbiamo prima far vedere che $df_p(w)$ dipende solo da f, p e w, in quanto a priori $df_p(w)$ potrebbe dipendere da una delle infinite curve $\gamma: I \to S$ tali che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.

Poniamo $p = \sigma(u(0), v(0))$. Sappiamo che

$$\hat{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma(u,v) = (\hat{u}(u,v), \hat{v}(u,v))$$

è una funzione liscia. Allora $(f \circ \sigma)(u,v) = \hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v})$

Sia dunque $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva in S con

$\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=\lambda \tau_u + \mu \tau_v = w$, $\operatorname{Im}\alpha \subset U$, dove
$\lambda = \dot{u}(0)$, $\mu = \dot{v}(0)$, $\tau_u = \frac{\partial \tau}{\partial u}(q)$, $\tau_v = \frac{\partial \tau}{\partial v}(q)$, $q=(u(0),v(0))$

Si ha

$$(f\circ\alpha)(t) = f(\tau(u(t),v(t)))$$
$$= \hat{\tau}\,(\hat{u}(u(t),v(t)), \hat{v}(u(t),v(t))).$$

Si ha

$$df_p(w) := \frac{d\, f\circ\alpha}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\,\hat{\tau}(\hat{u},\hat{v})}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \dot{\hat{u}}(0)\,\hat{\tau}_{\hat{u}}(\hat{q}) + \dot{\hat{v}}(0)\,\hat{\tau}_{\hat{v}}(\hat{q}), \text{ dove } \hat{q} = \hat{\tau}^{-1}(\hat{p}) \in \hat{U}.$$

Ora $\dot{\hat{u}} = \left(\dot{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial v}\right)$, $\dot{\hat{v}} = \left(\dot{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial v}\right)$

Quindi

$$df_p(w) = \left(\lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial v}\right)\hat{\tau}_{\hat{u}} + \left(\lambda \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \hat{v}}{\partial v}\right)\hat{\tau}_{\hat{v}}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_u(t) &= (\tau\circ\gamma_u)(t) \\ &= \tau(a+t,b) \\ c_v(t) &= \tau(a,t+b) \\ q &= (a,b) \end{aligned}}$$

Quindi $df_p(w)$ dipende solo da p, f, λ, μ e la curva α che serve per rappresentare $\dot{\alpha}(0)=w$ è scomparsa!

Inoltre abbiamo ottenuto che

$$df_p(\tau_u) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial u}\hat{\tau}_{\hat{u}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial u}\hat{\tau}_{\hat{v}}$$
$$df_p(\tau_v) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial v}\hat{\tau}_{\hat{u}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial v}\hat{\tau}_{\hat{v}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= df_p(\tau\circ\gamma_u) \\ &= \frac{d\, f\circ\tau\circ\gamma_u}{dt} \\ &= \frac{\partial f\circ\tau}{\partial u} = \hat{\tau}_u. \end{aligned}}$$

e che $\left[\hat{\tau}_u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial u}\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{u}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{v}}\right]$

$$df_p(\lambda\tau_u + \mu\tau_v) = \lambda\, df_p(\tau_u) + \mu\, df_p(\tau_v),$$

cioè $df_p : T_pS \to T_{\hat{p}}\hat{S}$ è lineare e $\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \end{bmatrix}$

è la matrice che la rappresenta nelle basi $\{\tau_u, \tau_v\}$ di T_pS e $\{\hat{\tau}_{\hat{u}}, \hat{\tau}_{\hat{v}}\}$ di $T_{\hat{p}}\hat{S}$.

Prima forma fondamentale

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Per ogni $p \in S$ consideriamo il prodotto scalare euclideo $\langle \, , \rangle$ ristretto al piano T_pS. Lo denoteremo con $\langle \, , \rangle_p$. Quindi se $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pS$ poniamo

$$\langle v, w \rangle_p := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 .$$

La forma quadratica associata:

$$I_p : T_pS \to \mathbb{R} \qquad I_p(v) := \langle v, v \rangle_p$$

è detta la prima forma fondamentale di S in p.
Il prodotto scalare euclideo è definito positivo per cui

$$\langle v, v \rangle_p \geq 0 \quad \forall v \in T_pS$$

e si ha $\langle v, v \rangle_p = 0 \iff v = 0 \in T_pS$.

La prima forma fondamentale permette di misurare la lunghezza di curve su S, l'angolo tra vettori, la superficie di regioni di S.
l'area

Esprimiamo I_p in una base di T_pS associata a una carta $(U, \tau, \tau(U) = V)$ intorno p.
Scegliamo come base di T_pS la base $\{\tau_u, \tau_v\}$.
Sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva liscia con $\dot\sigma(0) \in T_pS$, $\sigma(0) = p$. Si ha
$\dot\sigma(0) = \dot u \tau_u + \dot v \tau_v$, per cui

$$I_p(\dot\sigma(0)) = \langle \dot u \tau_u + \dot v \tau_v , \dot u \tau_u + \dot v \tau_v \rangle_p$$
$$= \langle \tau_u, \tau_u \rangle_p \dot u^2 + 2 \langle \tau_u, \tau_v \rangle_p \dot u \dot v + \langle \tau_v, \tau_v \rangle_p \dot v^2$$

 dove le funzioni coinvolte si valutano in τ_0.

Se poniamo
$$E(u_0,v_0) = \langle \tau_u, \tau_u\rangle_p$$
$$F(u_0,v_0) = \langle \tau_u, \tau_v\rangle_p$$
$$G(u_0,v_0) = \langle \tau_v, \tau_v\rangle_p$$
con $(u_0,v_0) = \tau^{-1}(p)$, allora possiamo scrivere

$$I_p(\dot{\sigma}(0)) = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

E, F, G sono detti i coefficienti della prima forma fondamentale nella base $\{\tau_u, \tau_v\}$ di T_pS. Al variare di $p \in V$, otteniamo delle funzioni $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ da U in $\mathbb{R}$ che sono lisce, oppure $E\circ\tau^{-1}$, $F\circ\tau^{-1}$, $G\circ\tau^{-1}$ da V in $\mathbb{R}$.

Vediamo come misurare la lunghezza di curve sulla superficie S. Sia $\sigma : I \to S$ una curva e $[a,b] \subset I$. Allora

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t))}\, dt$$

è la lunghezza della curva ristretta all'intervallo $[a,b]$

La lunghezza d'arco s di σ è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\sigma}(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{I_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t))}\, dt$$

Se $\sigma(t) = \tau(u(t), v(t))$, cioè $\operatorname{Im}\sigma \subset \tau(U)$ allora

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt$$

Se $\sigma: I \to S$ e $\tau: I \to S$ sono due curve regolari che si intersecano per $t = t_0$, l'angolo θ tra le due curve in $\sigma(t_0) = \tau(t_0) = p \in S$ è dato da

$$\cos\theta := \frac{\langle \dot\sigma(t_0), \dot\tau(t_0)\rangle_p}{\|\dot\sigma(t_0)\| \, \|\dot\tau(t_0)\|}$$

cioè $\theta = \text{arc}(\quad)$

Per esempio l'angolo tra le curve coordinate di una parametrizzazione $\varphi: U \to V \subset S$, cioè

$\sigma: u \mapsto (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$ $\qquad q = (u_0, v_0)$

$\tau: v \mapsto (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$

è dato da $\dfrac{\langle \dot\sigma(t_0), \dot\tau(t_0)\rangle}{\|\dot\sigma(t_0)\| \, \|\dot\tau(t_0)\|}$

$$= \frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad \theta = \text{arc}\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)$$

in quanto
$$\dot\sigma(t_0) = \varphi_u(u_0, v_0)$$
$$\dot\tau(t_0) = \varphi_v(u_0, v_0)$$

<u>Notiamo che le curve coordinate sono ortogonali $\iff F(u,v) = 0$ su U</u>

Notiamo che per la matrice simmetria

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}(q) \qquad q = (u, v)$$

si ha
$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0,$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle > 0, \quad \text{e inoltre}$$

$$EG - F^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle^2 = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 > 0$$

in quanto φ_u e φ_v sono linearmente indipendenti.

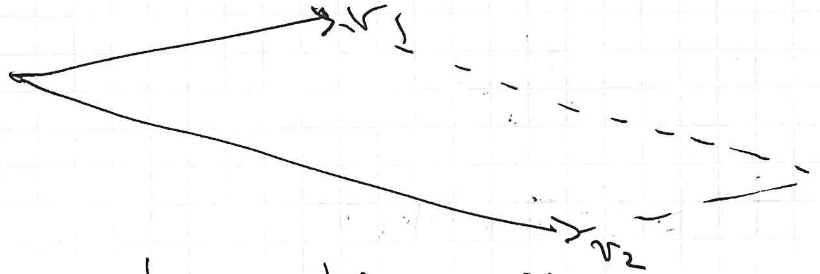
Definizione Sia $R \subset S$ una regione limitata contenuta in una carta $V \subset S$, dove $\tau : U \to V = \tau(U)$ è una sua parametrizzazione. Il numero positivo

$$\iint_Q \|\tau_u \wedge \tau_v\| \, du\, dv = A(R), \quad Q = \tau^{-1}(R) \subset U$$

è detto l'area di R.

È una buona definizione (Vedi Do Carmo) (Vedi sotto!)

Se siamo nel piano $\mathbb{R}^2$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ lin. indipendenti



Allora l'area del parallelogramma è data da

$$\|v_1 \wedge v_2\| := \sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}$$

Siccome $\|\tau_u \wedge \tau_v\| = \sqrt{\|\tau_u\|^2 \|\tau_v\|^2 - \langle \tau_u, \tau_v\rangle^2}$

allora $A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv$

Cambio coordinate $\|\tau_{\hat u} \wedge \tau_{\hat v}\| \left|\frac{\partial \hat u, \hat v}{\partial u, v}\right| = \|\tau_u \wedge \tau_v\|$

$$= \iint_{Q_1} \|\tau_{\hat u} \wedge \tau_{\hat v}\| \left|\frac{\partial \hat u, \hat v}{\partial u, v}\right| du\, dv = \iint_{Q_1} \|\tau_{\hat u} \wedge \tau_{\hat v}\| \, d\hat u\, d\hat v$$

poiché $\left|\frac{\partial u, v}{\partial \hat u, \hat v}\right| du\, dv = d\hat u\, d\hat v$, per cui l'area non cambia.

Isometrie tra superfici:

Definizione Un'applicazione liscia tra superfici: $f: S_1 \to S_2$
è detta un'isometria locale, se per ogni $p \in S_1$ l'applicazione lineare $df_p: T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ è un'isometria rispetto alle forme fondamentali I_p di S_1 e $I_{f(p)}$ di S_2. Cioè si ha

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)}$$

per ogni $w_1, w_2 \in T_pS_1$.

Esempio. Poniamo $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ e
$S_2 = S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$

Definiamo

$$f: S_1 \to S_2 \quad \text{con}$$
$$f(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$$

Allora $\operatorname{Im} f = S_2$, f è liscia. Prendiamo $p = (u, v, 0) \in S_1$ e $f(p) = (\cos u, \sin u, v) \in S_2$.
Notiamo che se prendiamo un intorno piccolo di $(u, v, 0)$ in S_1, l'applicazione $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ è una parametrizzazione di S_2 in $f(p)$.
Lo spazio tangente a $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = S_1$ è generato da $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.
Lo spazio tangente a S_2 in $f(p)$ è generato da $w_1 = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$.
L'applicazione df_p è data dalla matrice

$$\begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $df_p(e_1) = w_1$ e $df_p(e_2) = w_2$

Siano $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in T_p S_1$, $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \in T_p S_1$.
Allora

$$\langle df_p(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2), df_p(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)\rangle$$

$$= \alpha_1\beta_1 \langle df_p(e_1), df_p(e_1)\rangle + \alpha_1\beta_2 \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle$$

$$+ \alpha_2\beta_1 \langle df_p(e_2), df_p(e_1)\rangle + \alpha_2\beta_2 \langle df_p(e_2), df_p(e_2)\rangle$$

Se dimostriamo che

$$\langle df_p(e_1), df_2(e_1)\rangle = \langle e_1, e_1\rangle$$

$$\langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$$

$$\langle df_p(e_2), df_p(e_2)\rangle = \langle e_2, e_2\rangle$$

otteniamo che

$$\langle df_p(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2), df_p(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)\rangle$$

$= \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2\rangle$. In conclusione per dimostrare in generale che un'applicazione lineare

$$F : (V, \langle\, , \rangle_V) \to (W, \langle\, , \rangle_W)$$

tra spazi dotati di prodotti scalari conserva i prodotti scalari, è necessario e sufficiente che

$$\langle F(v_i), F(v_j)\rangle_W = \langle v_i, v_j\rangle_V$$

per una base $\{v_1, \ , v_n\}$ di V.

Nel nostro caso

$$1 = \langle df_p(e_1), df(e_1)\rangle = \langle w_1, w_2\rangle = \langle e_1, e_1\rangle$$

$0 = \langle df_p(e_1), df_p(e_2)\rangle = \langle w_1, w_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$

$1 = \langle df_p(e_2), df_p(e_2)\rangle = \langle w_2, w_2\rangle = \langle e_2, e_2\rangle$,

e siamo a posto.

Oss. Sia $f: S_1 \to S_2$ un'isometria locale. Allora per ogni $p \in S_1$, l'applicazione lineare $df_p: T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ è iniettiva. Infatti:

$\operatorname{Ker} df_p = (0)$. Vediamo perché. Supponiamo che

$df_p(w) = 0$. Allora $\langle df_p(w), df_p(w)\rangle_{f(p)}$

$= \langle w, w\rangle_p = 0$. Siccome $\langle\,,\,\rangle_p$ è definito positivo, segue che $w = 0$, come volevamo vedere. Dunque $df_p: T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ è un isomorfismo in quanto $\dim T_pS_1 = \dim T_{f(p)}S_2$. Pertanto il Teorema della funzione inversa implica che esiste un intorno U_1 di p in S_1 e un intorno U_2 di $f(p)$ in S_2, tale che $f: U_1 \to U_2$ è un diffeomorfismo. In altre parole f è un diffeomorfismo locale.

<u>Definizione</u> Un'isometria locale $f: S_1 \to S_2$ è un'isometria globale se f è un diffeomorfismo globale.

Per esempio il piano e il cilindro sono localmente diffeomorfi, ma non lo sono globalmente. Se lo fossero avrebbero lo stesso gruppo fondamentale. Sappiamo che $\mathbb{R}^2$ è contraibile e quindi $\pi_1 = (0)$, mentre il cilindro è omotopo al cerchio e quindi $\pi_1 = \mathbb{Z}$ $\square$

<u>Definizione</u> Diremo che S_1 è localmente isometrica a S_2 se per ogni $p \in S_1$ esiste un'isometria di un intorno di p in S_1 con un aperto di S_2.
Nota che non si richiede l'esistenza di un'applicazione liscia $f: S_1 \to S_2$ globale.

<u>Proposizione</u> Siano S_1 e S_2 due superfici in $\mathbb{R}^3$. Allora S_1 è localmente isometrica a S_2 se e solo se per ogni $p_1 \in S_1$ esistono un punto $p_2 \in S_2$, un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, una parametrizzazione $\sigma_1 : U \to S_1$ in p_1, una parametrizzazione $\sigma_2 : U \to S_2$ in p_2, tali che

$$E^{S_1} \equiv E^{S_2}, \quad F^{S_1} \equiv F^{S_2}, \quad G^{S_1} \equiv G^{S_2}, \quad (\sigma_1^{-1}(p_1) = \sigma_2^{-1}(p_2) = q)$$

dove $E^{S_1}, F^{S_1}, G^{S_1}$ (rispettivamente, $E^{S_2}, F^{S_2}, G^{S_2}$) sono i coefficienti della prima forma fondamentale di S_1 rispetto a σ_1 (rispettivamente, di S_2 rispetto a σ_2)

<u>Dim</u>. Supponiamo che S_1 sia localmente isometrica a S_2. Sia $p_1 \in S_1$ e $f: U_1 \to U_2$ un'isometria, dove U_1 è un intorno aperto di p_1 in S_1 e U_2 è un intorno aperto di $f(p_1) = p_2$ in S_2. Consideriamo una parametrizzazione

$$\sigma_1 : U \to S_1 \quad \text{in } p_1$$

tale che $\sigma_1(U) \subseteq U_1$. Poniamo $\sigma_2 := f \circ \sigma_1$. Allora $\sigma_2 : U \to U_2 \subset S_2$ è una parametrizzazione di S_2 in p_2.
Vediamo che i coefficienti $E^{S_1}, F^{S_1}, G^{S_1}$ coincidono risp. con $E^{S_2}, F^{S_2}, G^{S_2}$.

$$E^{S_1}(u,v) = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_u(u,v) \rangle = \langle df_{p_1}(\sigma_u), df_{p_2}(\sigma_u) \rangle$$

$$= \langle \sigma_{2u}, \sigma_{2u} \rangle, \text{ in quanto } \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} = df_{p_1}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}\right) \text{ e}$$

$\frac{\partial \tau_2}{\partial v} = d f_{p_1}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v}\right)$. Quindi $E^{S_1} \equiv E^{S_2}$ e in modo analogo $F^{S_1} \equiv F^{S_2}$, $G^{S_1} \equiv G^{S_2}$ (su U!).

Viceversa, supponiamo che τ_1 e τ_2 siano parametrizzazioni come nell'enunciato. Poniamo $f = \tau_2 \circ \tau_1^{-1} : \tau_1(U) \to \tau_2(U)$.
Siccome τ_1 e τ_2 sono diffeomorfismi, abbiamo che $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ è un diffeomorfismo. Vediamo che è un'isometria. Sia $p_1 \in \tau_1(U)$ e $w \in T_{p_1}S_1$, con $w = \alpha_1 \tau_{1u} + \alpha_2 \tau_{1v}$. Allora

$$d f_{p_1}(\alpha_1 \tau_{1u} + \alpha_2 \tau_{1v}) = \alpha_1\, d f_{p_1}(\tau_{1u}) + \alpha_2\, d f_{p_1}(\tau_{1v})$$

Ora
$$d f_{p_1}(\tau_{1u}) = \tau_{2u}, \quad d f_{p_1}(\tau_{1v}) = \tau_{2v}.$$
e ciò basta per dire che

$$I_{f(p_1)}(d f_{p_1}(w)) = I_{p_1}(w).$$

pag 171 Abate

Vediamo che $d f_{p_1}(\tau_{1u}) = \tau_{2u}$ e $d f_{p_1}(\tau_{1v}) = \tau_{2v}$.

$$d f_{p_1} = d(\tau_2 \circ \tau_1^{-1})_{p_1} = (d\tau_2)_{\tau_1^{-1}(p_1)} \circ (d\tau_1^{-1})_{p_1}$$

Ora $(d\tau_1)_{q_1} : \mathbb{R}^2 = T_{q_1}U \to T_{\tau_1(q_1)}S_1$, $\tau_1(q_1) = p_1$ è tale che

$$(d\tau_1)_{q_1}(e_1) = \tau_{1u}, \quad (d\tau_1)_{q_1}(e_2) = \tau_{1v}$$

Quindi
$$d f_{p_1}(\tau_{1u}) = (d\tau_2 \circ d\tau_1^{-1})(\tau_{1u}) = d\tau_2(e_1) = \tau_{2u}$$
$$d f_{p_1}(\tau_{1v}) = (d\tau_2 \circ d\tau_1^{-1})(\tau_{1v}) = d\tau_2(e_2) = \tau_{2v}.$$

—·—

<u>Oss</u>. Essere localmente isometrici è una relazione riflessiva e transitiva, ma non è una relazione simmetrica. Vedi figure per "dimostrazione":

Seconda forma fondamentale

<u>Definizione</u> Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se esiste un campo di vettori unitari (versori) normali di classe C^∞, cioè esiste un'applicazione:

$N: S \to \mathbb{R}^3$ con $N(p) \perp T_pS$, $\forall p \in S$

$\|N(p)\| = 1$, $\forall p \in S$ e N è di classe C^∞ su S.

<u>Esempio</u> Sia $S = F^{-1}(0)$, dove $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ha 0 come valore regolare. Poniamo

$$N(p) := \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}(p)$$

Allora $N: S \to \mathbb{R}^3$ è un campo di versori normali a S. Inoltre N è di classe C^∞ su S.

Abbiamo già visto che se $\sigma: I \to S$ è una curva liscia con $\sigma(0) = p$, $\dot{\sigma}(0) = v \in T_pS$, si ha $\nabla F(p) \cdot \dot{\sigma}(0) = 0$.

E' utile conoscere il seguente (difficile da dimostrare) risultato.

<u>Teorema</u> Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ chiusa in $\mathbb{R}^3$ (per la topologia indotta) è orientabile.

<u>Corollario</u> Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ compatta è orientabile

Per vedere se una superficie non è orientabile è utile il

<u>Lemma</u> Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Allora S non è orientabile se e solo se esistono una curva liscia chiusa $\sigma: [0,1] \to S$ e un campo normale $\hat{N}: [0,1] \to S^2$ lungo (*) σ tale che $\hat{N}(0) = -\hat{N}(1)$ $\left(\hat{N}(t) \text{ versore} \perp T_{\sigma(t)}S \ \forall t \in I\right)$ (*)

Osservazione. Su una carta $\tau : U \to S$ abbiamo l'orientazione data da

$$N(p) := \frac{\tau_u \wedge \tau_v}{\|\tau_u \wedge \tau_v\|}(q)$$

dove $p = \tau(q)$.

Supponiamo S orientata dal campo di versori $\hat{N}$. In ogni punto $p \in S$, siccome $N(p) \perp T_pS$, $\hat{N}(p) \perp T_pS$ si ha

$$\hat{N}(p) = \pm N(p)$$

Prendendo carte (U, τ, V) con U connesso il segno si conserva su tutto $V = \tau(U)$. Scambiando eventualmente le coordinate u e v, possiamo supporre che $\hat{N}(p) = N(p)$ su ogni U.

Quindi il nostro campo $\hat{N}$ ristretto a $V = \tau(U)$ non è altro che $N(p)$, $\forall p \in V$.

Naturalmente N induce un'applicazione

$N : S \to S^2$ in quanto $\|N(p)\| = 1$ per ogni $p \in S$.

Siccome $N(p) \perp T_pS$, $T_{N(p)}S^2 \perp N(p)$ allora

$$T_pS = T_{N(p)}S^2.$$

Pertanto $d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2 = T_pS$

è un operatore lineare su T_pS $\forall p \in S$.
Consideriamo le curve coordinate su S.

$C_u: \quad t \mapsto (t+u_0, v_0) \xrightarrow{z} z(t+u_0, v_0)$

$C_v: \quad t \mapsto (u_0, t+v_0) \xrightarrow{z} z(u_0, t+v_0)$

dove $z(u_0,v_0) = p$, $0 \in I \mapsto (u_0,v_0) = q$.

Allora
$$\dot{C}_u(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial z}{\partial u}(q)\dot{u}(0) + \frac{\partial z}{\partial v}(q)\dot{v}(0)$$
$$= z_u(q)$$
$$\dot{C}_v(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial z}{\partial u}(q)\dot{u} + \frac{\partial z}{\partial v}(q)\dot{v}$$
$$= z_v(q)$$

Dunque $d_pN(z_u) = d_pN(\dot{C}_u) = \dfrac{d(N \circ C_u)}{dt}\Big|_{t=0}$
$$= \frac{d\, N(u(t), v(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial N}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial N}{\partial v}\dot{v} = N_u$$

e invece $d_pN(z_v) = N_v$

<u>Teorema</u> L'operatore lineare $d_pN: T_pS \to T_pS$ è autoaggiunto, cioè
$$\langle d_pN(v), w\rangle_p =$$
$$\langle v, d_pN(w)\rangle_p \quad \forall v, w \in T_pS.$$

Dim. $v = a_{11}z_u + a_{21}z_v$, $w = a_{12}z_u + a_{22}z_v$

$\langle d_pN(v), w\rangle = a_{11}a_{12}\langle d_pN(z_u), z_u\rangle + a_{11}a_{22}\langle d_pN(z_u), z_v\rangle$
$\qquad + a_{21}a_{12}\langle d_pN(z_v), z_u\rangle + a_{21}a_{22}\langle d_pN(z_v), z_v\rangle$

Ora $\langle d_pN(z_u), z_u\rangle_p = \langle z_u, d_pN(z_u)\rangle_p$
$\qquad \langle d_pN(z_v), z_v\rangle_p = \langle z_v, d_pN(z_v)\rangle_p$

poiché $\langle\, ,\rangle_p$ è simmetrico.

Se proviamo che $\langle d_pN(z_u), z_v\rangle_p = \langle z_u, d_pN(z_v)\rangle_p$

$\langle d_p N(\tau_v), \tau_u \rangle_p = \langle \tau_v, d_p N(\tau_u) \rangle_p$
allora otteniamo l'asserto.
$N(\varphi)$ è normale a $T_pS \Rightarrow$

$$N \cdot \tau_u = 0 \quad , \quad N \cdot \tau_v = 0.$$

da cui derivando rispetto a u e v

$$* \begin{cases} N_u \cdot \tau_u + N \cdot \tau_{uu} = 0 \\ N_v \cdot \tau_u + \underline{N \cdot \tau_{uv}} = 0 \qquad \Leftarrow \tau_{uv} = \tau_{vu} \\ N_v \cdot \tau_v + N \cdot \tau_{vv} = 0 \\ N_u \cdot \tau_v + \underline{N \cdot \tau_{uv}} = 0 \end{cases}$$

otteniamo
$$\begin{aligned} N_v \cdot \tau_u &:= \langle dN(\tau_v), \tau_u \rangle \\ \| \qquad & \qquad \| \\ N_u \cdot \tau_v &:= \langle dN(\tau_u), \tau_v \rangle \end{aligned}$$

cioè
$$\begin{aligned} \langle dN(\tau_v), \tau_u \rangle &= \langle dN(\tau_u), \tau_v \rangle \\ &\overset{*}{=} \langle \tau_v, dN(\tau_u) \rangle \end{aligned}$$

che è ciò che volevamo.
<u>I dim</u>

$$\begin{aligned} \langle dN(\tau_u), \tau_v \rangle &\overset{*}{=} \langle \tau_v, dN(\tau_u) \rangle \\ &= \langle dN(\tau_v), \tau_u \rangle \\ &= \langle \tau_u, dN(\tau_v) \rangle \end{aligned}$$

Nota che usiamo la conseguenza di $*$
$\langle N_v, \tau_u \rangle = \langle N_u, \tau_v \rangle$ e la simmetria di
$\langle \, , \, \rangle$ ∎

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata tale che $N : S \to S^2$ su una carta $(U,V) \xrightarrow{\sigma} V \subseteq S$, $N(p) = N(\sigma(u,v))$
$= \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$. Definiamo ora la seconda forma fondamentale di S.

<u>Definizione</u> Sia $p \in S$, poniamo

$\Pi_p(W_1, W_2) := \langle -dN_p(W_1), W_2 \rangle_p$

Siccome $\langle\, , \rangle_p$ è bilineare e $-dN_p$ è lineare, Π_p è una forma bilineare.

Π_p è appunto detta la seconda forma fondamentale di S in p.

Inoltre $\langle -d_pN(W_1), W_2 \rangle = \langle W_1, -dN_p(W_2) \rangle$
$= \langle -dN_p(W_2), W_1 \rangle$
implica che

$$\Pi_p(W_1, W_2) = \Pi_p(W_2, W_1)$$

cioè Π_p è simmetrica.

La matrice associata a Π_p nella base $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ di T_pS è $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ dove:

$L := \Pi_p(\sigma_u, \sigma_u)$

$M := \Pi_p(\sigma_u, \sigma_v) = \Pi_p(\sigma_v, \sigma_u)$

$N := \Pi_p(\sigma_v, \sigma_v)$

Con l'altra notazione

$L = \langle -dN_p(\sigma_u), \sigma_u \rangle = -N_u \cdot \sigma_u$

$M = \langle -dN_p(\sigma_u), \sigma_v \rangle = -N_u \cdot \sigma_v = -N_v \cdot \sigma_u$

$N = \langle -dN_p(\sigma_v), \sigma_v \rangle = -N_v \cdot \sigma_v$

Ora $N \perp r_u$, $N \perp r_v$ $\Rightarrow$

$$N \cdot r_u = N \cdot r_v = 0$$

da cui

$$N_u \cdot r_u + N \cdot r_{uu} = 0$$
$$N_u \cdot r_v + N \cdot r_{uv} = 0$$
$$N_v \cdot r_v + N \cdot r_{vv} = 0$$

Quindi $L = N \cdot r_{uu}$, $M = N \cdot r_{uv}$, $\mathcal{N} = N \cdot r_{vv}$

<u>Esercizio</u> Supponiamo $\Pi_p \equiv 0$ $\forall p \in S$. Provare che $S \subseteq H$, dove H è un piano di $\mathbb{R}^3$.

Sol

$$L = M = \mathcal{N} = 0 \quad \forall p \in S$$

implica che

$$N_u \cdot r_u = N_v \cdot r_u = N_u \cdot r_v = N_v \cdot r_v = 0$$

cioè N_u e N_v sono ortogonali a r_u e r_v cioè a T_pS, e questo vale per ogni $p \in S$.

Inoltre $N \cdot N = 1$ $\Rightarrow$ $N \cdot N_u = N \cdot N_v = 0$

Quindi N_u, N_v sono ortogonali a $\{r_u, r_v, N\}$, la quale è una base di $\mathbb{R}^3$. Pertanto $N_u = N_v = 0$, (cioè $N = w \in \mathbb{R}^3$ è un vettore costante) questo fatto implica che

$$(r \cdot N)_u = r_u \cdot N + r \cdot N_u = 0 + 0 = 0$$
$$(r \cdot N)_v = r_v \cdot N + r \cdot N_v = 0 + 0 = 0$$

Quindi la funzione $r \cdot N$ è costante, cioè

$$r \cdot N = d, \text{ con } d \in \mathbb{R}. \text{ Quindi } r \text{ questa}$$

nel piano ($\sigma \cdot N + d = 0$). Se S è connessa allora S è contenuta nel piano precedente.

Esempio Sia $\sigma: (u,v) \longmapsto (u, v, f(u,v))$ la parametrizzazione della superficie $S = Gr(f)$, dove $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è liscia.

Allora $N = \dfrac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$

$\sigma_{uu} = (0, 0, f_{uu})$, $\sigma_{uv} = \sigma_{vu} = (0, 0, f_{uv})$, $\sigma_{vv} = (0, 0, f_{vv})$ per cui

$$L = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$v = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $w = (a_{12}, a_{22}, a_{23})$ con $\|v\| = \|w\| = 1$, $v \perp w$

Piano $\sigma(u,v) = (a_{11}u + a_{12}v + b_1, a_{21}u + a_{22}v + b_2, a_{31}u + a_{32}v + b_3)$

$E = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$, $F = 0$, $G = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$

$\sigma_{uu} = 0$, $\sigma_{uv} = 0$, $\sigma_{vv} = 0 \Rightarrow L = M = N = 0$

Cilindro $\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

$\sigma_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$, $\sigma_{uv} = (0,0,0)$, $\sigma_{vv} = (0,0,0)$

$N = (\cos u, \sin u, v)$

Quindi $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$

mentre $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$

Sia S una superficie, $N(p)$ un versore normale a T_pS. Allora i piani che passano per p e paralleli a $N(p)$, tagliano la superficie in curve in un intorno di p. Infatti vale il

<u>Lemma</u> Sia S una superficie, $N(p) \perp T_pS$ con $\|N\|=1$. Dato un versore $w \in T_pS$ con $\|w\|=1$, allora il piano H_w passante per p e parallelo a w e $N(p)$, interseca la superficie in una curva regolare nell'intorno di p.

<u>Dim</u> L'equazione di H_w è

$$\langle X-p,\ w \wedge N(p) \rangle = 0, \text{ dove } X=(x_1,x_2,x_3)$$

Sia $\varphi : U \to V \subset S$ una parametrizzazione in un intorno di p $(=\varphi(q))$

Si ha $\varphi(u,v) \in H_w \cap S$ se e solo $(u,v) \in U$ soddisfa l'equazione

$$f(u,v) := \langle \varphi(u,v) - p,\ w \wedge N(p) \rangle = 0$$

Proviamo che $C = \{(u,v) \in U \mid f(u,v) = 0\}$ è in un intorno di $q = (u_0,v_0)$ una curva regolare sostegno di $\sigma : I \to U$.

Infatti,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = \langle \varphi_u,\ w \wedge N(p) \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \langle \varphi_v,\ w \wedge N(p) \rangle$$

Se avessimo $\frac{\partial f}{\partial u}(q) = \frac{\partial f}{\partial v}(q) = 0$, avremmo

$w \wedge N(p) \perp \tau_u(1), \tau_v(1)$, cioè
$w \wedge N(p) \perp T_p(S)$, cioè parallelo a $N(p)$:
assurdo in quanto $w \wedge N(p)$ non è parallelo a $N(p)$.

Ora basta osservare che

$\tau(C) = H_w \cap \tau(U)$ è il sostegno della composizione $\tau \circ \sigma$ vicino a p, che è una curva regolare. Poniamo $C_w = \tau(C)$ ∎

La curva C_w è detta sezione normale a S in p lungo la direzione $w \in T_pS$.

<u>Definizione</u> Sia $w \in T_pS$ un versore tangente a S in p. Il numero reale
$\mathcal{K}(w) := \Pi_p(w) = \langle -d_pN(w), w \rangle$
è detto curvatura normale di S in p nella direzione $\langle w \rangle$.

<u>Oss</u>. $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(-w)$, cioè $\mathcal{K}$ non dipende dal verso di w, ma solo dalla sua direzione. Se cambiamo segno a $N(p)$, otteniamo che $\mathcal{K}$ cambia segno.

Sia $\sigma : I \to S$ una curva in S con $\sigma(0) = p$ e $\|\dot\sigma(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$.
Allora $\dot\sigma(t) \in T_{\sigma(t)}S \quad \forall t \in S$, quindi

$\langle \dot\sigma(t), N(t) \rangle = 0$, dove $N(t) = N(\sigma(t))$,
cioè la restrizione di N alla curva σ.
Derivando rispetto a t otteniamo
$\langle \ddot\sigma(t), N(t) \rangle + \langle \dot\sigma(t), \dot N(t) \rangle = 0$

Quindi

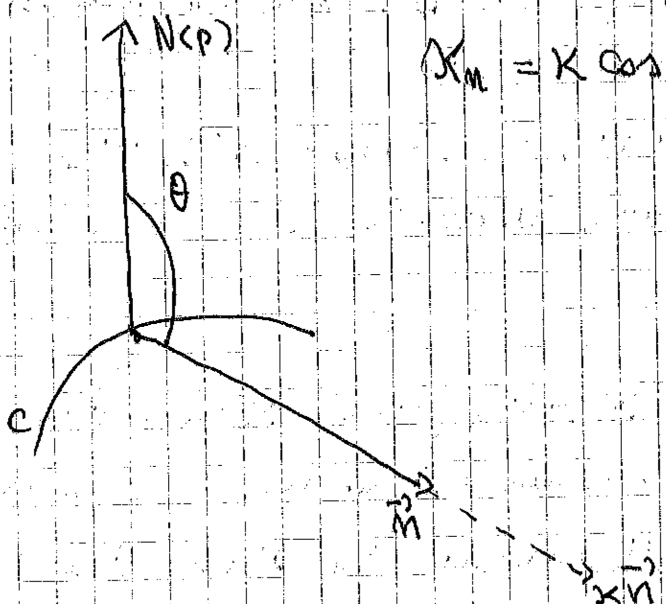
$$\Pi_p(\dot\sigma(0)) = -\langle d_pN(\dot\sigma(0)), \dot\sigma(0)\rangle$$

$$= -\langle \dot N(0), \dot\sigma(0)\rangle = \langle N(0), \ddot\sigma(0)\rangle$$

$$= \langle N(0), \kappa \vec n\rangle(p) = \kappa_n(p)$$

dove $\kappa_n := \kappa \langle N(0), \vec n\rangle(p)$ è detto curvatura normale in p della curva C parametrizzata da σ.

Nota che $\ddot\sigma(0) = \kappa \vec n$ è l'equazione che definisce la curvatura κ di C in p, $\vec n$ è il versore normale a C in p.



$$\kappa_n = \kappa \cos\theta$$

<u>Oss</u> Le curve che stanno in S e passano per p con lo stesso vettore tangente hanno la stessa curvatura normale. Cioè vale

<u>Proposizione (Meusnier)</u> Le curve che stanno in S e aventi in p la stessa tangente, hanno la stessa curvatura normale in p

<u>Proposizione</u> Un campo di vettori $w(t)$ lungo $\sigma: I \to S$ è parallelo lungo σ se e
$$\left(\nabla_\sigma w(t) = 0 \quad \forall t \in I \right)$$
solo se $\dot{w}$ è perpendicolare al piano tangente $T_{\sigma(t)} S \quad \forall t \in I$.

Dim $\nabla_\sigma w(t) = 0 \Rightarrow \dot{w}(t) = \langle \dot{w}, N \rangle N \perp T_{\sigma(t)} S$ $\forall t \in I$. Viceversa se $\dot{w} = \lambda N$, allora $\nabla_\sigma w = \lambda N - \langle \dot{w}, N \rangle N = \lambda N - \lambda N = 0$. ∎

Diamo la definizione di curva più fondamentale su una superficie.

<u>Definizione</u> Una geodetica su una superficie S è una curva $\sigma: I \to S$ di classe C^∞ tale che
$$\nabla_\sigma \dot{\sigma} \equiv 0$$

<u>Proposizione</u> Una geodetica su S ha velocità costante.

<u>Dim</u> Si ha $\dfrac{d\,\dot{\sigma}\cdot\dot{\sigma}}{dt} = 2(\dot{\sigma}\cdot\ddot{\sigma})$

Siccome σ è una geodetica $\nabla_\sigma \dot{\sigma} = 0$, cioè $\ddot{\sigma}$ è un multiplo di N e quindi $\ddot{\sigma}$ è perpendicolare a $\dot{\sigma}$ (che giace nel piano tangente).

Dunque $0 = \dot{\sigma}\cdot\ddot{\sigma}$, cioè $\dfrac{d\|\dot{\sigma}\|^2}{dt} = 0$, per cui $\dot{\sigma}(t)\cdot\dot{\sigma}(t) = \text{cost}$, cioè la velocità scalare $\|\dot{\sigma}\|$ è costante ∎

Proposizione Una curva con $\|\dot{\sigma}\|=1$ è una geodetica se e solo se la curvatura geodetica di σ è nulla ovunque.

Dim La curvatura geodetica verifica

$$K_g = \pm \ddot{\sigma} \cdot (N \wedge \dot{\sigma}).$$

Ora $\ddot{\sigma}$ è parallelo a N, dunque è perpendicolare a $N \wedge \dot{\sigma}$, per cui $K_g \equiv 0$.

Viceversa $K_g \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\sigma} \perp N \wedge \dot{\sigma}$. Inoltre $\ddot{\sigma} \perp \dot{\sigma}$, per cui $\ddot{\sigma} = \lambda N$. Dunque la proiezione di $\ddot{\sigma}$ su $T_{\sigma(t)}S$ è nulla ovvero

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} \equiv 0 \quad \blacksquare$$

Esempio Una retta $\sigma(t) = t \cdot \vec{b} + \vec{a}$ che giace su una superficie S, è una geodetica. Infatti $\ddot{\sigma} \equiv 0$ $\blacksquare$

Esempio I grandi cerchi di S^2 sono geodetiche.

Parametrizziamo con lunghezza d'arco, cioè

$$\|\dot{\sigma}\| = 1$$

Allora $C = H \cap S^2$, con H piano per l'origine, è tale che $\ddot{\sigma}$ è ortogonale a $\dot{\sigma}$, una sta in H. Siccome $(N \wedge \dot{\sigma}) \perp \ddot{\sigma} \Rightarrow K_g = 0$, cioè C è una geodetica $\blacksquare$

Il Teorema Egregium di Gauss

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata tramite un campo di versori normali

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

in modo tale che se $\varphi : U \to V \subset S$ è una parametrizzazione locale di S, si abbia

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p)$$

(nota che $\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p)$ è inteso come $\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(q)$, dove $q = \varphi^{-1}(p)$)

L'operatore lineare $-d_pN : T_pS \to T_pS$ è autoaggiunto. Pertanto esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di T_pS tale che

$$-d_pN(e_1) = K_1 e_1$$

$$-d_pN(e_2) = K_2 e_2$$

con $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo supporre $K_1 \leq K_2$.

Se restringiamo $\langle -d_pN(v), v\rangle_p = \Pi_p(v)$ ai vettori di T_pS di norma 1, cioè del tipo $v = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$, allora

K_1 è il minimo di $\Pi_p : S^1 \to \mathbb{R}$

K_2 è il massimo di $\Pi_p : S^1 \to \mathbb{R}$.

Definizioni. Le funzioni $k_1(p)$, $k_2(p)$ sono dette le curvature principali di S in p. e_1 e e_2 sono invece le direzioni principali in p.

Nota che $\Pi_p(e_1) = \langle -d_pN(e_1), e_1\rangle = k_1$

$$\Pi_p(e_2) = \langle -d_pN(e_2), e_2\rangle = k_2$$

$$\Pi_p(v) = \langle -d_pN(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)\rangle$$

$$= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \quad \forall v \in S^1 \subset T_pS.$$

Allora

$$k_1\cos^2\theta + k_1\sin^2\theta = k_1 \leq \Pi_p(v) \leq k_2\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = k_2$$

Inoltre i valori k_1 e k_2 sono assunti da e_1 e e_2. Dunque

$$\{\Pi_p(v) \mid v \in T_pS,\ \|v\|=1\} = [k_1, k_2]$$

($\|v\|=1$ è un S^1 connesso $\Pi_p : S^1 \to \mathbb{R}$ manda S^1 in un intervallo compatto connesso, cioè $[k_1, k_2]$)

Definizione

$$K(p) := \det(d_pN) = \det(-d_pN) = k_1k_2$$

è detta curvatura Gaussiana di S in p

$$H(p) := -\frac{\mathrm{Tr}(d_pN)}{2} = \frac{k_1+k_2}{2}$$

è detta curvatura media di S in p.

Sia z_u, z_v la base di T_pS. Allora esiste un'unica matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tale che

$$-dN_p(z_u) = -N_u = a_{11} z_u + a_{21} z_v$$
$$-dN_p(z_v) = -N_v = a_{12} z_u + a_{22} z_v$$

Nota che A non è necessariamente simmetrica, almeno che $\{z_u, z_v\}$ non sia una base ortonormale. Infatti se $z_u \cdot z_u = z_v \cdot z_v = 1$, $z_u \cdot z_v = 0$, si ha

$\langle -dN_p(z_u), z_v \rangle = a_{11}\langle z_u, z_v \rangle + a_{21} \langle z_v, z_v \rangle = a_{21}$, ma anche
$\langle -dN_p(z_u), z_v \rangle = \langle z_u, -dN_p(z_v) \rangle = \langle -dN_p(z_v), z_u \rangle$
$= a_{12} \langle z_u, z_u \rangle + a_{22} \langle z_v, z_u \rangle = a_{12}.$

Siccome

$$L = N \cdot z_{uu} = -N_u \cdot z_u$$
$$M = N \cdot z_{uv} = -N_u \cdot z_v$$
$$M = N \cdot z_{vu} = -N_v \cdot z_u$$
$$N = N \cdot z_{vv} = -N_v \cdot z_v$$

si ha

$$L = a_{11} E + a_{21} F$$
$$M = a_{11} E + a_{21} G$$
$$M = a_{12} E + a_{22} F$$
$$N = a_{12} F + a_{22} G$$

cioè $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$

Prendendo le trasposte:

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$ da cui

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} GL-FM & GM-FN \\ -EL+EM & -FM+EN \end{bmatrix}$$

Siccome $K = \det A$, $H = \frac{Tr(A)}{2}$, otteniamo

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}$$

Notiamo che la matrice di Π_p nella base z_u, z_v, cioè $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$

non coincide in generale con la matrice di $-dN_p$ nella stessa base. Se $E = G = 1$, $F = 0$, allora

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

<u>Esempio</u> Piano e cilindro
$(u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ hanno

$$E = G = 1 \text{ e } F = 0$$

Ora vogliamo esprimere la curvatura K solo in funzione di E, F, G e loro derivate, liberandoci di L, M, N.

Consideriamo la base z_u, z_v, N di T_pS

Allora $z_{uu}, z_{uv}, z_{vu}, z_{vv}, N_u, N_v$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$ che si esprimono come combinazioni lineari della data base.

Esisteranno coefficienti (unici) tale che:

$$\begin{aligned}
\tau_{uu} &= \Gamma^1_{11}\tau_u + \Gamma^2_{11}\tau_v + L_1 N\\
\tau_{uv} &= \Gamma^1_{12}\tau_u + \Gamma^2_{12}\tau_v + L_2 N\\
\tau_{vu} &= \Gamma^1_{21}\tau_u + \Gamma^2_{21}\tau_v + \overline{L}_2 N \qquad (*)\\
\tau_{vv} &= \Gamma^1_{22}\tau_u + \Gamma^2_{22}\tau_v + L_3 N\\
-N_u &= a_{11}\tau_u + a_{21}\tau_v\\
-N_v &= a_{12}\tau_u + a_{22}\tau_v
\end{aligned}$$

I nuovi coefficienti Γ^k_{ij}, $i,j,k=1,2$ sono detti i coefficienti di Christoffel di S nella parametrizzazione τ. Poiché $\tau_{uv}=\tau_{vu}$, si ha

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}, \quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}, \quad L_2=\overline{L}_2$$

Facciamo il prodotto scalare delle prime 4 relazioni in $(*)$ con N: si ha

$$L=L_1, \quad M=L_2=\overline{L}_2, \quad N=L_3$$

Facciamo il prodotto scalare delle prime quattro relazioni con τ_u e τ_v, otteniamo

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11}E+\Gamma^2_{11}F &= \langle \tau_{uu},\tau_u\rangle = \frac{E_u}{2}\\
\Gamma^1_{11}F+\Gamma^2_{11}G &= \langle \tau_{uu},\tau_v\rangle = F_u-\frac{E_v}{2}\\[1ex]
\Gamma^1_{12}E+\Gamma^2_{12}G &= \langle \tau_{uv},\tau_u\rangle = \frac{E_v}{2}\\
\Gamma^1_{12}F+\Gamma^2_{12}G &= \langle \tau_{uv},\tau_v\rangle = \frac{G_u}{2}\\[1ex]
\Gamma^1_{22}E+\Gamma^2_{22}F &= \langle \tau_{vv},\tau_u\rangle = F_v-\frac{G_u}{2}\\
\Gamma^1_{22}F+\Gamma^2_{22}G &= \langle \tau_{vv},\tau_v\rangle = \frac{G_v}{2}
\end{aligned}$$

Abbiamo tre sistemi lineari con determinante $EG-F^2>0$, sempre positivo!

Quindi i simboli Γ_{ij}^{k} si possono calcolare in funzione di E, G, F e loro derivate.

<u>Conseguenza</u> Ogni concetto geometrico e ogni proprietà geometrica espressa in funzione dei simboli di Christoffel sono invarianti rispetto a isometrie.

Utilizzando le derivate terze di σ, con precisi conti si ottiene il

Teorema (Egregium di Gauss)
La curvatura Gaussiana K di una superficie è data dalla formula

$$K = \frac{1}{G}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^{1}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{1}}{\partial v} + \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1} - \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1}\right]$$

<u>BRIOSCHI</u> esprimeva K nel modo seguente:

$$K = \frac{\det\begin{bmatrix} -\frac{E_{vv}}{2} + F_{uv} - \frac{G_{uu}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u - E_v/2 \\ F_v - G_u/2 & E & F \\ G_v/2 & F & G \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & E_v/2 & G_u/2 \\ E_v/2 & E & F \\ G_u/2 & F & G \end{bmatrix}}{(EG - F^2)}$$

In due casi molto importanti, la formula si semplifica:

1) $F = 0$, $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}$

2) $E = 1$, $F = 0$ $\quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$